A

TREATISE

ON

PLANE TRIGONOMETRY

IN

BENGALI.

BY LATE

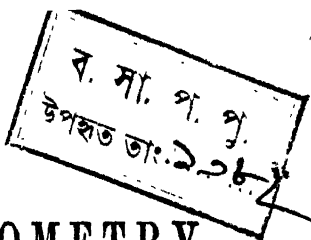
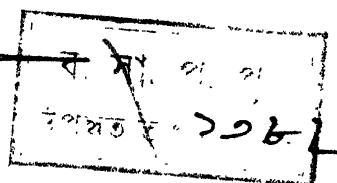
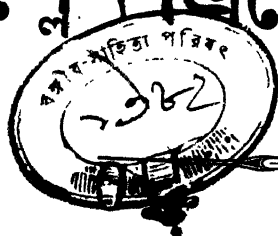
BABU BHOLANATH MOZUMDAR,

EDITED BY HIS SON

BEHARY LAL MOZUMDAR.

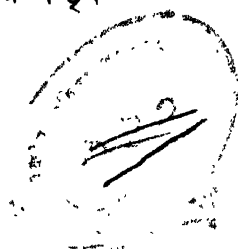
CALCUTTA:

PRINTED BY I. C. BOSE & CO., STANHOPE PRESS, 249, BOW-BAZAR STREET, AND PUBLISHED BY THE EDITOR AS ABOVE.

1879.

প্লেন ত্রিকোণমিতি।

৺ ভোলানাথ মজুমদার কর্ত্তৃক প্রণীত

ও তৎপুত্র

শ্রীবিহারিলাল মজুমদার কর্ত্তৃক

সম্পাদিত।

কলিকাতা।

শ্রীযুক্ত ঈশ্বরচন্দ্র বসু কোং র বহুবাজারস্থ ২৪৯ সংখ্যক ভবনে ষ্ট্যান্‌হোপ্‌ যন্ত্রে মুদ্রিত ও উক্ত সম্পাদক কর্ত্তৃক প্রকাশিত।

১২৮৬।

সূচীপত্র।

গ্রন্থকারের সংক্ষিপ্ত জীবনী।

বিশেষ বিজ্ঞাপন লিখিবার কিছু নাই, তবে গ্রন্থকার নব্য পাঠকের নিকট বিশেষ পরিচিত নহেন, সেই জন্য তাঁহার সংক্ষিপ্ত জীবনী এস্থলে সন্নিবেশিত করিলাম, তিনি কলিকাতার জোড়াসাঁকোয় বাস করিতেন। ইংরাজদিগের বঙ্গাধিকার করিবার বহু দিবস পূর্ব্ব হইতে তাঁহার পূর্ব্ব-পুরুষেরা কলিকাতায় বাস করিয়া আসিতেছিলেন। প্রথমতঃ, তিনি মান্যবর ডেভিড্ হেয়ার সাহেবের বিদ্যালয়ে পাঠাভ্যাস করেন এবং সেই পরোপকারী মহাত্মার বিশেষ অনুগ্রহভাজন হন। উক্ত বিদ্যালয়ে অধ্যয়ন সমাপনান্তে তিনি হিন্দু-কালেজে প্রবেশ করেন ও তথাকার প্রথম শ্রেণী পর্য্যন্ত পাঠ করেন। বাল্যকাল হইতেই তাঁহার গণিতশাস্ত্র আলোচনায় বিশেষ যত্ন ছিল। পরিশেষে বিখ্যাত অধ্যাপক (প্রফেসর) ভি. এল. রিজ সাহেব গণিত-শাস্ত্রে তাঁহার ব্যুৎপত্তির পরিচয় পাইয়া প্রশংসাপত্রসহ তাঁহাকে গ্রেট ত্রিকোণমৈতিক সর্বের সুপরিণ্টেণ্ডেণ্ট সাহেবের নিকট পাঠান। সুপরিণ্টেণ্ডেণ্ট সাহেব তাঁহাকে কম্পিউটেটরের কার্য্যে নিযুক্ত করেন। ২৩ বৎসর এই কার্য্য করিয়া তিনি উপরিস্থ কর্ম্মচারী সর্. এ. ওয়া (A. Waugh) ও কর্ণেল থুলিয়ার সাহেবের নিকট প্রশংসা লাভ করিয়াছিলেন। গণনাসম্বন্ধে মহামান্য আর্চডিকন প্র্যাট (Pratt) এবং কাপ্তেন (এক্ষণে মেজর জেনারেল) উলিয়াম সাহেবও তাঁহার নিকট সাহায্য প্রাপ্ত হইয়াছিলেন। কার্য্য হইতে অবসর লওয়ার পর তিনি বঙ্গভাষায় এই ত্রিকোণমিতি লিখেন, কিন্তু ১৮৭২ খৃঃ অব্দে মৃত্যু হওয়ায়, তিনি পুস্তক খানি প্রচার করিতে সমর্থ হন নাই।

তজ্জন্য এই পুস্তকের স্থানে স্থানে ভ্রম দৃষ্ট হইবে, পাঠকগণ অনুগ্রহ করিয়া সে গুলি সদয়দৃষ্টিতে দেখিবেন। তিনি সতত প্রফুল্ল ও উদারচিত্ত

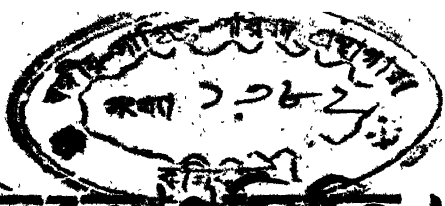
ছিলেন এবং কখনই পরোপকারে পরাঙ্মুখ হইতেন না। তাঁহার শিক্ষক মেঃ রিজ সাহেব তাঁহাকে নিম্ন-লিখিত প্রশংসাপত্র প্রদান করেন।

"(1.) It gives me great pleasure to certify that Babu "Bholanath Mojumdar, a pupil of the 1st class of the "Hindu College, is a young man who, by his abilities, which "are of the first order, and his undeviating good behaviour, "is an ornament to the Hindu College; and I am quite certain "that he will prove a valuable acquisition to any establish-"ment he may be employed in."

(Sd.) V. L. Rees,
Lecturer on Mathematics
at the Hindu College.

Calcutta,
2nd January, 1841.

শ্রীযুক্ত বাবু সুরেন্দ্রকৃষ্ণ দত্ত অনুগ্রহপূর্ব্বক এই পুস্তকের পাণ্ডুলিপি দেখিয়া দিয়াছেন; তজ্জন্য সুরেন্দ্রবাবুর নিকট চিরবাধিত রহিলাম।

সম্পাদক।

প্লেন ত্রিকোণমিতি।

প্রথম অধ্যায়।

রেখা ও কোণের পরিমাণবিষয়।

১। ত্রিকোণমিতি বিদ্যাতে ত্রিভুজ ক্ষেত্রসমূহের পরিমাণ জানা যায়, অর্থাৎ তাহাদিগের বাহুর ও কোণের এবং ক্ষেত্রান্তর্গত ভূমিখণ্ডের বিশেষ পরিমাণ জানা যায়।

২। ইহা দ্বিবিধ প্রথম, প্লেন; দ্বিতীয়, স্ফ্যারিকেল।

৩। প্লেন ত্রিকোণমিতি দ্বারা সমধরাতলস্থ ত্রিভুজ ক্ষেত্রসমূহের বিশেষ সকল পরিমাণ জানা যায়। আর স্ফ্যারিকেল ত্রিকোণমিতি দ্বারা (স্ফ্যারিকেল) গোলকের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজসমূহের বৃত্তান্ত সকল জানা যায়। গোলকত্রিভুজ-ক্ষেত্রের বাহু সকল গোলাকার ও কোণ সকল কুব্জা ও কুব্জাকৃতি হয়।

৪। বীজগণিতের ন্যায় এক্ষণে ত্রিকোণমিতির সকল বিষয় সিদ্ধান্ত করা হয়। রেখা কিম্বা কোণকে ব্যক্ত করিতে হইলে বীজগণিতে যে কোন অক্ষরদ্বারা ব্যক্ত হয়, ত্রিকোণমিতিতে ঐ রূপ ব্যক্ত হইলে তাহাকে রেখীয়, কিম্বা কংসান কহা যায়।

৫। আমরা এক্ষণে এই সকল শ্রেণীয়র বিষয় লিখিব যাহাতে সমধরাতল ত্রিকোণমিতির বিষয় জানা যায়।

৬। ইতিপূর্ব্বে, শ্রেণীয় লিখিবার পূর্ব্বে, তৈজিক ভাবে রেখা ও কোণ সকলকে কিরূপে প্রকাশ করা যাইবে, তদ্বিষয় আমরা প্রথমে প্রকাশ করিতে প্রবৃত্ত হইলাম।

ভিন্ন ভিন্ন রেখা সকল বীজগণিতের ন্যায় ক খ গ ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা প্রকাশ হইলে এই হারে এমত বুঝিতে হইবে যে নির্দ্দিষ্ট মাপের রেখা কতবার বা কত গুণ ঐ সকল রেখাতে আছে। নির্দ্দিষ্ট মাপের রেখাকে যদি ফুট কিম্বা ইঞ্চ ধরা যায়, তাহা হইলে ক রেখাকে এমত বুঝিতে হইবে যে, নির্দ্দিষ্ট মাপের রেখা ইহাতে ক সংখ্যক বার, বা ক গুণ ফুট কিম্বা ইঞ্চ আছে। এইরূপ খ গ ইত্যাদি রেখা সকলের পরিমাণ বুঝিতে হইবে; অর্থাৎ খ রেখাতে খ সংখ্যক বার ও গ রেখাতে গ সংখ্যক বার, ফুট কিম্বা ইঞ্চ আছে।

৭। রেখা দুই প্রকার + রেখা ও — রেখা। ইহার তাৎপর্য্য এই যে; যে রেখা কোন বিন্দু হইতে ডানি দিকে কিম্বা বাম দিকে প্রথমতঃ টানা যায় তাহাকে + ধন রেখা; আর ঐ বিন্দু হইতে তাহার বিপরীত দিকে রেখার গতি হইলে, সেই অংশ টুকুকে — ঋণ রেখা কহা যায়, যথা—

গ॰ ক গ খ

ক খ একটী রেখা হউক; ও তাহার পরিমাণ ক বিন্দু হইতে খ বিন্দু পর্য্যন্ত। এবং মনে কর ইহাতে ক সংখ্যক নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ আছে, যাহাকে তৈজীকমতে ক কিম্বা + ক কহা যায়। আর যদ্যপি খ বিন্দু হইতে ক বিন্দুর দিকে গ পর্য্যন্ত গতি

হয়, এবং তাহাতে খ সংখ্যক পরিমাণ আছে ধরা যায়, তাহা হইলে ক গ রেখার পরিমাণ ক—খ সংখ্যক হইবেক। এক্ষণে খ যদ্যপি ক হইতে ন্যূন হয় তাহা হইলে ক—খ অংশ ধনাত্মক হইবেক, ও গ বিন্দু কখ রেখার মধ্যেই থাকিবেক; এবং কগ রেখাটুকু কখর দিকে গতি হইবেক।

কিন্তু খ যদ্যপি ক অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে গ বিন্দুর স্থান ক বিন্দুর বাম দিকে হইবে, যেমত গ' আছে। কারণ খগ রেখার খ বিন্দু হইতেই ক বিন্দুর দিকে গমন পরিমিত হইতেছে; সুতরাং খগ' রেখা বৃহত্তর হওয়াতে কখ রেখার অতিরিক্ত হইয়া ক বিন্দুর বিপরীত দিকে গ বিন্দু স্থিত হইবে, যেমন গ'। ও কগর পরিমাণ খ—ক হইবে, এবং ক—খ ঋণাত্মক রাশি হইবে। অতএব ইহাকে অর্থাৎ ক—খ কে—(খ—ক) লেখা যাইতে পারে।

৮। ক্ষেত্রতত্ত্বে জানা আছে যে, একটী রেখা আর একটী রেখার উপর পতিত হইলেই কোণ হয়, কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে সেরূপ নহে। ত্রিকোণমিতিতে যদ্যপি এক রেখা কোন বিন্দুকে আবদ্ধ করিয়া অপর সীমার বিন্দুকে যদি গতি করান যায় তাহাতে ঐ রেখায় পুনঃ পুনঃ স্থান পরিবর্ত্তন হেতু বিবিধ প্রকার কোণের সৃষ্টি হয়; এই সকল কোণের পরিমাণ নির্দ্দিষ্ট নহে, কোন কোন কোণ ১∟ সমকোণ হইতে ন্যূন হইতেও পারে, কোন কোন কোণ ১।২।৩।৪ ∟ সমকোণ হইতে বৃহত্তরও হইতে পারে। এবং যতক্ষণ ঐ রেখা চতুর্দ্দিক পরিভ্রমণ করিয়া পুনর্ব্বার স্বস্থানে না আইসে ততক্ষণ কোণ উৎপন্ন হইতে থাকে, এইরূপ ঐ রেখা পুনঃ পুনঃ ভ্রমণ

করিয়া যখন আপন প্রথম স্থানে আইসে তখন একটী বৃত্ত উৎপন্ন হয়। তাহাতে যে যে কোণ উৎপন্ন হইবে তাহারা একত্র যোগে ৪∟ সমকোণের সমান হইবে। এবং ঐ রেখাকে পুনর্ব্বার পরিভ্রমণ করাইলে আবার কোণ উৎপন্ন হইতে থাকিবে। সুতরাং কোণের পরিমাণ নিশ্চয় নাই, ১ এক সমকোণের ন্যূনও হইতে পারে ও ৪। ৫∟ ইত্যাদি সমকোণের বেশীও হইতে পারে।

এই সমুদায় কোণের পরিমাণ জানিতে হইলে, প্রথম বিন্দুকে কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া অপর সীমাপর্য্যন্ত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত হইলে শেষ সীমাস্থ বিন্দুর স্থান পরিবর্ত্তন হইয়া যে বৃত্তাংশটী উৎপন্ন হয় তাহাতে যে ডিগ্রী থাকিবে, তদুপরি দণ্ডায়মান কোণেরও সেই পরিমাণ জানিতে হইবে। ইহাতে কোণের পরিমাণ ১ ডিগ্রী হইতে ৩৬০ ডিগ্রীপর্য্যন্ত হইতে পারে, এবং পুনর্ব্বার ঘুরিতে আরম্ভ হইলে ৩৬০ ডিগ্রী হইতে বেশীও হইতে পারে। যথা—ক খ$_১$ একটী রেখা* যদি ইহার ক বিন্দুকে বদ্ধ করিয়া ও কখ$_১$কে লইয়া ভ্রমণ করান যায় তাহা হইলে খ$_১$ বিন্দুর স্থান ক্রমে খ$_২$ বিন্দু ও খ$_৩$ বিন্দু ও খ$_৪$ বিন্দু এবং খ$_৫$ বিন্দু খ$_৬$ বিন্দু ইত্যাদি ভিন্ন ভিন্ন স্থানে যাইবে, পরে ঐ ক খ$_১$ রেখা পুনর্ব্বার আপন স্থানে আসিয়া পৌঁছিলেই দেখা যাইবে যে, একটী বৃত্ত হইয়াছে; এবং ঐ ক খ$_১$ রেখা পুনঃ পুনঃ স্থান পরিবর্ত্তন হেতু ভিন্ন ভিন্ন প্রকার কোণের সৃষ্টি হইয়াছে। যেমত খ$_১$ ক খ$_২$∠, খ$_২$ ক খ$_৩$∠ ও খ$_৩$ ক খ$_৪$∠ ও খ$_৪$ ক খ$_৫$∠ ও খ$_৫$ ক খ$_৬$∠ এবং খ$_৬$ ক খ$_১$ ইত্যাদি।

---

* চিত্র ১ দেখ।

এক্ষণে ইহাও জানা আবশ্যক যে কোন বৃত্ত ৩৬০ সম অংশে বিভক্ত হইলে তাহাকে ডিগ্রী কহে ঐ প্রত্যেক ডিগ্রীকে ৬০ সম ভাগে বিভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগকে মিনিট কহে, এবং ঐ প্রত্যেক মিনিটকে ৬০ সম ভাগে বিভক্ত করিলে এক এক ভাগকে সেকেণ্ড কহা যায়।

এক্ষণে কখ১ রেখায় ভিন্ন ভিন্ন স্থান পরিবর্ত্তন হেতু যে যে সকল ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তাংশ উৎপন্ন হইয়াছে, সেই সেই বৃত্ত-খণ্ডের উপরি যে যে কোণ দণ্ডায়মান আছে, সেই সেই কোণ সকল আপন আপন বৃত্ত-খণ্ডের দ্বারা পরিমিত হইয়া থাকে। যেমত খ১ কখ২ ∠ কোণ খ১ খ২ বৃত্ত-খণ্ড দ্বারা ও খ২ ক খ৩∠ কোণ খ২ খ৩ বৃত্ত-খণ্ডদ্বারা এবং খ৩ ক খ৪∠ কোণ খ৩ খ৪ বৃত্ত-খণ্ডদ্বারা পরিমাণ করা যায়। অর্থাৎ ঐ সকল ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত-খণ্ডে যত ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ড আছে, তত ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ড, প্রত্যেক খণ্ডোপরি দণ্ডায়মান কোণের পরিমাণ জানিতে হইবেক।

৯। এক্ষণে ধন, ঋণ ভেদে রেখা সকল যেমন দুই দুই ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, সেইরূপ কোণ সকলও দুই প্রকার, ধন + কোণ ও ঋণ—কোণ।

একটী রেখার সহিত অন্য এক রেখা উহার যে পার্শ্বে প্রথমতঃ কোণ করিবেক তাহাকে যদ্যপি ধন + কোণ কহাযায়, তাহা হইলে প্রথম রেখার বিপরীত পার্শ্বে ঐ দ্বিতীয় রেখা আনিয়া কোণ করিলে তাহাকে ঋণ—কোণ কহা যাইবে। যথা—

খ ক গ এক কোণ হউক, যাহা ক খ রেখার একপার্শ্বে*

* চিত্র ২ দেখ।

আছে। বীজগণিতের মতে এই কোণকে ক কোণ বা + ক* কোণ কহা যাউক। এবং কখ রেখা হইতে গকঘ অন্য এক কোণ ইহার বিপরীত দিকে কর তাহা এরূপ প্রকাশ কর যে যেন এই গকঘ ∠ কোণ কগ ও কখ রেখার ভিতরে রহে, এবং খ ক গ কোণ কখ রেখার যে পার্শ্বে আছে সেই পার্শ্বে থাকে। বীজগণিতের মতে ইহার নাম খ কোণ হউক, তাহা হইলে খ ক গ ∠ কোণ গ ক ঘ ∠ কোণ হইতে বড় হইবে; সুতরাং বীজগণিতের মতে খ ক ঘ ∠ কোণকে প্রকাশ করিতে হইলে ইহার পরিমাণ ক—খ হইবে। আর এইরূপ প্রকাশিত পরিমাণটী ধন বা ঋণ হইবে, যখন ক ∠ কোণ খ ∠ কোণ হইতে বড় ও ছোট হইবে। অর্থাৎ যখন খকঘ ∠ কোণ খ ক গ ∠ কোণের সহিত ক খ রেখার সম দিকে হইলে ঐ খ ক ঘ ∠ কোণ ধন হইবে। আর যদি গকঘ ∠ কোণ কখ রেখার বিপরীত দিকে পড়ে, (যেমত গকঘ, ∠ কোণ আছে) তাহা হইলে গকঘ, ∠ কোণ খকগ ∠ কোণ হইতে বড় হইবে; আর খক ঘ ∠ কোণ খকঘ,এর সম হইবে, সুতরাং খকঘ, ∠ কোণ গকঘ, ∠—খকগ ∠ কোণ হইবে। অতএব ইহাকে বীজগণিতের মতে প্রকাশ করিতে হইলে—(খ—ক) লিখিতে হইবে; এক্ষণে খ—কএর দ্বারা ঐ খকঘ ∠ কোণের পরিমাণ নির্ণয় হইতেছে। ও (—) ঋণ চিহ্ন দ্বারা ইহার স্থান নিশ্চয় হইতেছে, অর্থাৎ প্রথম দত্ত রেখার কোন দিকে ইহা স্থাপিত হইয়াছে তাহা জানা যাইতেছে।

১০। যে কোন এক রেখা বা কোন এক কোণ প্রথমতঃ

---

* চিত্র ২ দেখ।

যেদিকে তাহাদের গতি হইবে এবং ঐ রেখা বা ঐ কোণকে প্রথমতঃ যে চিহ্ন ধরা যাইবে, ও তাহার বিপরীতদিকে উহাদের গতি হইলে বিপরীত চিহ্ন ধরা যাইবে। অর্থাৎ প্রথম রেখা বা কোণকে যদি + ধন চিহ্ন ধরা যায় তাহার বিপরীত রেখা বা বিপরীত কোণ হইলে তাহাদের — ঋণ চিহ্ন জ্ঞান করিতে হইবে। আর প্রথমতঃ তাহাদের — ঋণ চিহ্ন ধরা হইলে বিপরীতদিক্‌কে + ধন বুঝিতে হইবে।

১১। এই ক্ষেত্রের খ খ১, ঘ ঘ১ যাহা টানা হইয়াছে তাহারা পরস্পর সমকোণ করিয়া ক বিন্দুতে এবং কগ১, কগ২ কগ৩, কগ৪ রেখা সকলকে যে কগ এই রেখার গতি দ্বারা উৎপন্ন তাহার ভিন্ন ভিন্ন স্থান মনে কর।* আর কগ রেখাকে কখ রেখার সহিত প্রথমে লগ্ন ছিল মনে কর। পরে ক বিন্দুর চতুর্দ্দিকে ভ্রমণ করাতে একটী বৃত্ত প্রকাশিত হইয়াছে। যেমন খঘ খ১ ঘ১ এক বৃত্ত এবং ক তাহার কেন্দ্র। আর ঐ সকল রেখার সীমা সকল ঐ বৃত্তের পরিধিতে আবদ্ধ আছে। খ খ১, ঘ ঘ১ রেখার দ্বারা ক বিন্দুর চতুষ্পার্শ্বের কোণস্থ স্থান সকল অর্থাৎ বৃত্তটী ৪ চারি অংশে বিভক্ত হইয়াছে, যাহাদের প্রত্যেককে সমকোণ L কহা যায়। যেমন খকঘ L, ঘকখ১ L, খ১কঘ১ L, ঘ১কখ L চারি কোণ আছে। এবং এই চারি সমকোণ যে ঐ বৃত্তের যে ৪ চারি খণ্ড পরিধিতে উপায় আছে, ত্রিকোণমিতিতে তাহাদের প্রথম চতুর্থ বৃত্তাংশ, দ্বিতীয় চতুরাংশ বৃত্ত, তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্ত, চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্ত কহে।

---

* চিত্র ৩ দেখ।

যখন কগ রেখা কখ রেখার উপর যুক্ত (লম্ব) ছিল তখন কোন কোণ প্রকাশ হয় নাই; সে অবস্থাকে কোণের অঙ্কুর বা শূন্য কোণ কহা যায়। আর যখন ঐ রেখা কগ$_1$* এর স্থানে আইসে, তখন খকগ$_1$ কোণ প্রকাশ হয় যাহা এক সমকোণ হইতে ন্যূন অতএব উক্ত কোণকে প্রথম চতুরাংশ বৃত্তের কোণ কহা যায়। ও যখন ঐ রেখা কঘ এর স্থানে আইসে তখন উহা খকঘ নামক একটী সমকোণ হয় পরে ক্রমে যখন কগ$_2$ এর স্থানে আসিয়া উপস্থিত হইল, তখন খকগ$_2$ এক কোণ হইল যাহা এক সমকোণ হইতে অধিক ও দুই সমকোণ হইতে ন্যূন তাহাকে দ্বিতীয় চতুরাংশ বৃত্তের কোণ কহা যায়। আর যখন ঐ রেখা কখ$_1$ এর উপর আইসে তখন ইহা ত্রিকোণমিতি মতে খকখ$_1$ কোণ প্রকাশ করে যাহাকে দুই সমকোণ কহা যায়। এইমত খকগ$_3$ কোণ যাহা খঘগ$_3$ বৃত্ত খণ্ডের উপর দণ্ডায়মান আছে, ও যাহা দুই ∟ সমকোণের অধিক ও তিন ∟ সম সমকোণের ন্যূন, তাহাকে তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্তের কোণ কহা যায়। আর খকঘ$_1$ কোণকে তিন সমকোণ কহা যায়; এবং খকগ$_4$ কোণ যাহা তিন সমকোণ হইতে বড় ও চারি সমকোণ হইতে ন্যূন; তাহাকে চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তের কোণ কহা যায়; ও যখন ঐ রেখা কখ এর উপর আসিয়া উপস্থিত হয় তখন ত্রিকোণমিতিতে উহাকে একটী কোণ বলা যাইতে পারে, যাহা চারি ∟ সমকোণের সমান। আবার ঐ কগ রেখাকে পুনর্গমন করাইতে আরম্ভ হইলে ঐইরূপ কগ$_1$ রেখার স্থানে প্রথমে

---

* চিত্র ৩ দেখ।

যাইবে, যাহা প্রথম চতুরাংশ বৃত্তেতে আছে; তাহার স্থানে পুনরাগমন করিলে পুনর্ব্বার এক কোণের উৎপত্তি হয় যাহা ৪∟ সমকোণের অধিক কিন্তু ৫∟ সমকোণ হইতে ছোট; এইরূপ যতবার ঐ রেখার গতি পুনঃ পুনঃ হইবে ততবার নুতন নুতন কোণের সৃষ্টি হইবে; যাহারা ৫। ৬। ৭ ইত্যাদি সমকোণের তুল্য হইতেও পারে এবং উহাদিগের হইতে বড়ও হইতে পারে। ইহাদিগকেও ত্রিকোণমিতি মতে কোণ কহা যায়।

এই সকল কোণকে + ধন কোণ কহা যায়; আর ঐ রেখাকে যদ্যপি বিপরীতদিকে গতি করান হয় তাহা হইলে — ঋণ কোণ সকল প্রকাশ পায় যেমত খ ক গ$_{৪}$ খ ক গ$_{৩}$ ইত্যাদি কোণ সকল আছে।*

কিন্তু এক্ষণে কঘ রেখার ডানিদিক হইতেই কোণের গণনা আরম্ভ হয়, এবং এইরূপ ধরাই রীতি। সুতরাং কঘ রেখার ঘ বিন্দুকে যদি ঘখএর দিকে গতি করান যায় তাহা হইলে ঘকগ$_{১}$ ∠ কোণ যাহা প্রথম চতুরাংশ বৃত্তে আছে তাহাতে + ধন কোণ কহা যায়। এইরূপে ঘকগ$_{৪}$ কোণ চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তের + ধন কোণ হইবে; কিন্তু প্রথম চতুরাংশ বৃত্তের — ঋণ কোণ হইবেক, এইরূপ সমুদায় বিবেচনা করিয়া লইতে হইবে।

ঐক এক সমকোণ ৯০ সমান অংশে বিভক্ত আছে ঐ সমানাংশকে ডিগ্রী কহা যায় ও প্রত্যেক ডিগ্রী ৬০ সমানাংশে বিভক্ত আছে তাহাদের নাম মিনিট এবং প্রত্যেক

* চিত্র ৩ দেখ।

মিনিট ৬০ অংশে বিভক্ত আছে তাহার এক এক ভাগকে সেকেণ্ড কহা যায়। পরে সেকেণ্ডের কোন অংশ থাকিলে তাহাকে সেকেণ্ডের ডেসিমেল অংশ করিয়া প্রকাশ করা গিয়া থাকে। এই সকল অংশের চিহ্ন এই ° ′ ″; প্রথম চিহ্নকে ডিগ্রী, দ্বিতীয়কে মিনিট ও তৃতীয়কে সেকেণ্ড কহে। এই সকল চিহ্ন যে যে অঙ্কের উপর থাকিবেক সেই সেই অঙ্ক-কে আপনাপন চিহ্নানুরূপ কথিত হইয়া থাকিবেক। যথা—৫০°, ২৭′, ৪৫″ .৬৫ এইরূপ লিখিত হইলে এই বুঝিতে হইবে যে তাহাতে ৫০ ডিগ্রী, ২৭ মিনিট; ৪৫ ও দশমিক ৬৫ সেকেণ্ড আছে।

এক্ষণে বুঝা যাইতেছে যে এক সমকোণে ৯০° আছে; দুই সমকোণে ১৮০° ও তিন সমকোণে ২৭০° এবং চারি সম-কোণে ৩৬০° ডিগ্রী আছে। আর চারি সমকোণের অতি-রিক্ত পরিমাণের কোণ হইলে ৩৬০° হইতে অধিক ডিগ্রীর দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। এইরূপ ⅓ সমকোণে ৩০° আছে; ½ সমকোণে ৪৫° ও ⅔ সমকোণে ৬০° আছে; এইরূপ ভগ্নাং-শিক কোণ সকলকে হিসাব করিয়া ডিগ্রী, মিনিট ইত্যাদির দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

যখন কোণ সকলকে সমকোণের সহিত সম্বন্ধ রাখিয়া প্রকাশ করিতে হয় তখন তাহারা ভিন্ন ভিন্ন নামের দ্বারা বিখ্যাত হয়। সেই নাম দুই প্রকার, প্রথম কমপ্লীমেণ্ট—(অনুপূরক) আর দ্বিতীয়ের নাম সপ্লীমেণ্ট (পূরাধিক)।

যে কোন কোণ সমকোণ হইতে অর্থাৎ ৯০° হইতে ন্যূন পরিমাণে হইলে সেই আংশিক ন্যূন কোণটীকে ঐ স্থূল

সমকোণের কমপ্লীমেণ্ট (অনুপূরক) কোণ কহা যায়। যথা কমপ্লীমেণ্ট (অনুপূরক) (ক) ∠ = ৯০°—ক।

এইরূপ কোন কোণ দুই সমকোণ অর্থাৎ ১৮০° হইতে ন্যূন হয় তাহা হইলে ঐ ন্যূন কোণকে ঐ স্থূল কোণের সপ্লীমেণ্ট কোণ কহা যায়। যথা সপ্লীমেণ্ট (ক) ∠ = ১৮০°—ক। যথা— কমপ্লীমেণ্ট (১৫°) = ৭৫°, কমপ্লীমেণ্ট (৩৫°—৪৫′—৫৫″) = ৫৪°—১৪′—৫″; কমপ্লীমেণ্ট = (১১৭°) = —২৭°। কমপ্লীমেণ্ট (১২৩°—৩৭′—৪৮″) = — ৩৩°–৩৭′–৪৮″। সপ্লীমেণ্ট (১৩৫°) = ৪৫°, সপ্লীমেণ্ট (–১৭°) = ১৯৭°। সপ্লীমেণ্ট- (২৩৪°) = —৫৪°। সপ্লীমেণ্ট (৫৭°–১৩′–৪৯″.৬৪) = ১২২°–৪৬′– ১০″.৩৬।

অতএব ইহাতে সপ্রমাণ হইতেছে যে, এই অঙ্কিত ক্ষেত্রতে (চিত্র ৩) যদি খ ক গ১ কোণের পরিমাণ ৬৬°-ধরা যায় তাহা হইলে তাহার কমপ্লীমেণ্ট = ৯০° — ৬৬° = ২৪° = ঘ ক গ১ ∠ কোণ। এবং যদি খ ক গ২ ∠কোণ = ১১৩° হয় তাহা হইলে ইহার কমপ্লীমেণ্ট = ৯০°—১১৩° = —২৩° = ঘ ক গ৪ ∠কোণ। এস্থানে ক ঘ রেখার বিপরীতদিকে ঐ ঘ ক গ৪ কোণ পড়িয়াছে তন্নিমিত্ত ঘ ক গ৪ ∠ কোণ ঋণ কোণ হইল। কারণ এস্থানে ঘ বিন্দু হইতে ঘ খ দিকের কোণ সকলকেই ধন কোণ ধরা গিয়াছে। এইরূপ খ ক গ২ কোণের সপ্লীমেণ্ট = খ১ ক গ২ ∠কোণ। এবং ইহা ধন কোণও বটে কারণ খ ক গ২ ∠ কোণ দুই সমকোণ অর্থাৎ ১৮০° হইতে ন্যূন। আর খ ক গ৩ এর সপ্লীমেণ্ট = খ১ ক গ৩ ∠; এই কোণটী—ঋণ কোণ হইবে। কারণ খ ক গ৩ কোণ দুই সমকোণ, অর্থাৎ ১৮০° হইতে

বড়। দুই সমকোণ + ধন ধরা গিয়াছে। আরও এস্থানে রেখার গতি ঘ বিন্দু হইতে খ বিন্দুর দিকে + ধরা গিয়াছে ও খ বিন্দু হইতে ঘ বিন্দুর দিকে—ধরা গিয়াছে; সুতরাং খ ক গ৹ কোণ ঋণাত্মক হইবেক। অতএব—খ ক গ৹ = —(খ ক খ১ + খ১ ক গ৹)। আর ঘ ক ঘ১ দুই ধন সমকোণের বা ১৮০°র তুল্য, কিন্তু ঘ ক ঘ১ = খ ক খ১; কারণ ইহারা উভয়েই দুই সমকোণের বা ১৮০°র তুল্য। এজন্য খ ক গ৹ কোণের সপ্লীমেণ্ট = ১৮০°—খ ক গ৹ = ঘ ক ঘ১—(খ ক খ১ + খ১ ক গ৹) = ঘ ক ঘ১—খ ক ঘ১—খ১ ক গ৹ = — খ ক গ৹। যদ্যপি ক খ গ৹ কোণের পরিমাণ ১৯৫° হয় তাহা হইলে ইহার সপ্লীমেণ্ট = ১৮০°—১৯৫° = —১৫°।

ক্ষেত্রতত্ত্বে জানা আছে যে কোন এক ত্রিভুজের তিন কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের তুল্য অর্থাৎ ১৮০° ডিগ্রী।

(১) সমকোণ-ত্রিভুজের এক সূক্ষ্ম কোণ অপর সূক্ষ্ম কোণের কমপ্লীমেণ্ট (অনুপূরক) কোণ হয়। যথা;—কখগ একটী সমকোণিক ত্রিভুজ ও গ কোণ যদি সমকোণ হয়, (চিত্র ৪) তাহা হইলে ক ∠ কোণ খ ∠ কোণের কমপ্লীমেণ্ট, এবং খ ∠ কোণ—ক ∠ কোণের কমপ্লীমেণ্ট হইবে, কারণ ক + খ = ৯০°, অতএব ক = ৯০°—খ এবং খ = ৯০°—ক, সুতরাং উহারা পরস্পর অনুপূরক হয়।

(২)। কোন এক ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ তাহার অপর দুই সমষ্টি কোণের সপ্লীমেণ্ট হয়। যথা;—কখগ কোন এক ত্রিভুজ, (চিত্র ৪) তাহার মধ্যে যে কোন কোণ লও সেই

কোণটী অপর দুই কোণ যোগ করিলে যে ফল হয় তাহার সপ্লীমেণ্ট ঐ কোণ হইবে। অর্থাৎ ক কোণ, গ কোণ + খ কোণের সপ্লীমেণ্ট হইবে, এবং গ কোণ, খ কোণ+ক কোণের সপ্লীমেণ্ট ও খ কোণ ক কোণ + গ কোণের সপ্লীমেণ্ট হইবে; কারণ ক+খ+গ = ১৮০°, অতএব ক = ১৮০°—(খ+গ), খ = ১৮০°—(ক+গ) এবং গ = ১৮০°—(ক+খ)।

আরও সপ্রমাণ হইতেছে যে, যদ্যপি কখগ কোন এক-ত্রিভুজ হয় ও ক,খ,গ নামক তাহার তিনটী কোণ প্রকাশ করা যায় তাহা হইলে ক+খ+গ = ১৮০°, অতএব এই তিনটী কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ সম্পূর্ণরূপ জানিতে হইলে উপ-রোক্ত সমীকরণটী ভিন্ন কোণ সম্বন্ধীয় আর একটী সমীকরণ আবশ্যক।

প্রথম উদাহরণমালা।

১। ১৭°—১৫′—৪৮″, ৩°—৫৫′—২৬″.৩৬, ১১২°—০′—৪২″, ১৭৪°—৫৬′—০″.৯২ এবং ০°—০′—১৬″ এই সকল কোণের কমপ্লীমেণ্ট কত? ও ইহারা কোন্ কোন্ চতুরাংশবৃত্তের অন্তর্গত কোণ?

২। ১৪৮°—১৭′—১৩″,—৩৩°—৩৬′, ১৯°—৩৫′—২৬″.৫৭, ২৫৫°—৫৫′—৫৫″.৩৯ এবং ০°—০′-০″.৯৯, এই সকল কোণের সপ্লীমেণ্ট কত? ও ঐ সকল সপ্লীমেণ্টেরা কোন কোন চতুরাংশবৃত্তের কোণ? এবং ১৩০°—০′-১১″.০৫৯, কোণকে ডিগ্রীর দশমিকে প্রকাশ কর?

৩। যদ্যপি কোন সমকোণি ত্রিভুজের, কোন এক সূক্ষ্ম কোণের পরিমাণ ৩°—৩৫′-৬″ হয়, তবে তাহার অন্য সূক্ষ্ম কোণের পরিমাণ কত?

৪। এক সমকোণিক ত্রিভুজের দুইটী সূক্ষ্ম কোণের অন্তর যদ্যপি ১৬°—৩২′ হয় তবে ঐ দুই কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?

৫। এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটী ভূমিস্থ কোণের পরিমাণ যদি ৫৯°—৪৯′—৩৯″ হয় তবে উহার শীর্ষ কোণের পরিমাণ কত ?

৬। এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ কোণের পরিমাণ যদি তাহার ভূমিস্থ একটী কোণের পরিমাণ অপেক্ষা $\frac{1}{6}$ পরিমাণে বৃহৎ হয় তবে ঐ ত্রিভুজের তিনটী কোণের স্ব স্ব পরিমাণ কত হইবে ?

৭। যদি কোন এক ত্রিভুজের কোন দুই কোণের যোগার্দ্ধ ৫০°, ও উহাদের অন্তরের অর্দ্ধ ৩০° হয়, তবে ঐ ত্রিভুজের তিন কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?

৮। কোন এক ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ যদ্যপি কোন এক অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী কোণের দেড়গুণ হয়, ও তাহার সপ্লীমেণ্ট যদি অন্য ঐ দূরবর্ত্তী অন্তরস্থ কোণের দেড় গুণ হয়, তাহা হইলে ঐ ত্রিভুজের তিন কোণের প্রত্যেকের প্রত্যেকের পরিমাণ কত হইবে ?

৯। সমকোণি ত্রিভুজের তিনকোণ যদি পাটীক শ্রেণীয় হয় (অনিশ্চিতরূপ) তবে তাহাদের প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?

১০। কোন এক ত্রিভুজের কোন কোণের সপ্লীমেণ্ট যদি দ্বিতীয় কোণের কমপ্লীমেণ্টের দ্বিগুণ হয়; ও তৃতীয় কোণের ৩ তিন গুণ হয় তবে তিনটী কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?

প্রথম অধ্যায়।

দ্বিতীয় অংশ।

কোন কোন ফরাসি গ্রন্থকর্ত্তারা সমকোণকে ১০০ সমান অংশে বিভক্ত করিয়াছেন; তাহার এক এক অংশের নাম গ্রেড, ও এক এক গ্রেডকে ১০০ সমান অংশে ভাগ করিলে তাহার এক এক ভাগকে মিনিট কহে; এবং ঐ মিনিটকে ১০০ সমান অংশে বিভাগ করিলে তাহার এক এক অংশকে সেকেণ্ড কহিয়া থাকেন। তাঁহাদের এইরূপ শত অংশে বিভক্ত করণের তাৎপর্য্য এই ছিল যে টাকা ও বস্ত্রাদি এবং দ্রব্যাদির পরিমাণ সূক্ষ্ম করিবার নিমিত্ত পাটীগণিতে যে জন্য দশমিকের ব্যবহার হইয়াছে, কোণ সকলের ও উক্তরূপ সূক্ষ্ম পরিমাণ নির্ণয় নিমিত্ত দশমিকে সুবিধা হইবে এই কারণেই উক্তরূপ শত অংশে বিভাগ করিয়া গিয়াছেন। এই সকল অংশিত নামের চিহ্ন এই গ, ', "। যেমন ৩২^{গ}—৪৫'—৫৭" এইরূপ লিখিত হইলে, ৩২ গ্রেড, ৪৫ মিনিট, ৫৭ সেকেণ্ড পঠিত হইবে। এস্থলে আমরা গ্রেডের চিহ্নকে গ বলিয়া নিশ্চয় করিলাম, এইরূপ হইলে মিনিট সেকেণ্ডকে এক কালে গ্রেডের দশমিক ভগ্নাংশতে প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা ৪৫' মিনিট $= \frac{৪৫}{১০০}$ গ্রেড; অর্থাৎ .৪৫ গ্রেডের দশমিক অংশ। এইরূপ সেকেণ্ড ৫৭" $= \frac{৫৭}{(১০০)^{২}} = \frac{৫৭}{১০০০০}$ গ্রেডের দশমিক অংশ ইহা .00৫৭ গ্রেডের দশমিক অংশ হইবে। এই মিনিট ও সেকেণ্ড একত্র করিলে ·৪৫৫৭ গ্রেডের দশমিক

অংশ হয়, এজন্য ৩২গ—৪৫´—৫৭´´কে ৩২গ .৪৫৫৭ করিয়া লেখা যাইতে পারে। এবং কোন এক কোণের পরিমাণ যদি গ্রেড, মিনিট, ও সেকেণ্ড না দিয়া গ্রেডে ও গ্রেডের দশমিক রূপে দেওয়া যায়, তাহা হইলে তাহাকে একবারে গ্রেড, মিনিট, ও সেকেণ্ডে প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা ৪৫গ.২৬৫৯৪৩ = ৪৫গ—২৬—৫৯´´.৪৩। (গ্রেডের মিনিট ও সেকেণ্ড, ডিগ্রী মিনিট ও সেকেণ্ডের পরিমাণ হইতে ভিন্ন এ জন্য তাহাদের চিহ্ন উল্টা পাল্টা অর্থাৎ (বিপরীত) করিয়া লেখা যায়।

এক্ষণে যদি এক গ্রেড এক সমকোণের এক শত অংশের এক অংশ হইল তবে ৩২গ.৪৫৫৭কে .৩২৪৫৫৭ এক সমকোণের দশমিক রূপে লেখা যাইতে পারে। দশমিক হিসাবের সুবিধার নিমিত্ত ফরাসি দেশের পণ্ডিতেরা অতি পূর্ব্বকালে এই মত কোণের অংশ প্রকাশ করিয়াছিলেন, কিন্তু এক্ষণে এ মত কোন দেশে প্রচলিত নাই। উক্ত ফরাসী দেশের গণিতজ্ঞ পণ্ডিতেরাই স্বকীয় দেশের এই মত এক্ষণে পরিত্যাগ করিয়াছেন। কারণ এই মত প্রকাশ হইবার পূর্ব্বে অনেক গণিত পুস্তকে এবং Tables ইংরাজীমতে অর্থাৎ কোণের পরিমাণ ষাট (ষষ্টি) অংশে বিভক্তমতে প্রকাশ হইয়াছিল সুতরাং এক্ষণে এই নুতন মত প্রচলিত করিলে, অধিক গোলযোগের সম্ভাবনা এই হেতু পরিত্যক্ত হইয়াছে।

কোন এক কোণ ইংরাজী পরিমাণ হইতে ফরাসী পরিমাণ, অথবা ফরাসী পরিমাণ হইতে ইংরাজী পরিমাণে পরিবর্ত্তিত করা যাইতে পারে। ইহার নিয়ম নিম্নে প্রকাশ করিতেছি, এক্ষণে যদি কোণের ডিগ্রীর পরিমাণকে ড কহা

যায়, এবং গ্রেডের পরিমাণকে গ ধরা যায়, এক্ষণে এক সম কোণে ৯০° আছে ; এজন্য ঐ কোণের রেশীয় সমকোণের সহিত $\frac{ড}{৯০}$ হইবে ; এবং এক সমকোণে ১০০ গ্রেড আছে ; এ জন্য ঐ কোণের রেশীয় সমকোণের সহিত $\frac{গ}{১০০}$ হইবে। এই দুই প্রকার রেশীয়ই এক সমকোণের অর্থাৎ একই বৃত্তের চতুরাংশের সহিত রেশীয় হইতেছে। এ জন্য

$$\frac{ড}{৯০} = \frac{গ}{১০০}\text{; এবং } ১০০\ ড = ৯০\ গ\text{;}$$

$$\therefore ড = \frac{৯০}{১০০}গ = \frac{৯}{১০}গ = গ — \frac{১}{১০}গ\text{;}$$

$$\text{এবং } গ = \frac{১০০}{৯০}ড = \frac{১০}{৯}ড = ড + \frac{১}{৯}ড\text{।}$$

অতএব গ্রেডকে ডিগ্রী করিবার নিয়ম এই যে, কোন এক কোণে যত গ্রেড থাকিবে তাহার দশমাংশের এক অংশ ঐ গ্রেড হইতে বাদ দিলে অবশিষ্ট সংখ্যা ডিগ্রী পরিমাণ হইবে।

আর ডিগ্রীকে গ্রেড করিবার নিয়ম এই যে কোন এক কোণে যত ডিগ্রী থাকিবে তাহাতে তাহার নবমাংশের এক অংশ যোগ করিয়া যে সংখ্যা হইবে তাহাই গ্রেড পরিমাণ হইবে।

আবার মনে কর যেন কোন এক কোণে ম সংখ্যক ইং মিনিট ও ম১ সংখ্যক ফং মিনিট আছে ; আর ৯০ × ৬০ ইংরাজী মিনিট এক সমকোণ হইয়া থাকে, অতএব ঐ কোণের সম্বন্ধ সমকোণের সহিত $\frac{ম}{৯০\times৬০}$ হইবে আর দেখ

১০০×১০০ ফং মিনিটে এক সমকোণ হইতেছে; অতএব $\frac{ম^১}{১০০×১০০}$ উক্ত কোণের সম্বন্ধ সমকোণের সমান হইবে, এবং দেখ যখন $\frac{ম}{৯০×৬০}$ এবং $\frac{ম^১}{১০০×১০০}$ এক সমকোণেরই সহিত একটী কোণেরই সম্বন্ধ হইতেছে তখন $\frac{ম}{৯০×৬০}=\frac{ম^১}{১০০×১০০}$ হইবে।

এবং ১০০×১০০ ম = ৯০×৬০ম^১,

$\therefore$ ম $=\frac{৯০×৬০ম^১}{১০০×১০০}$; $=\frac{৯×৬}{১০×১০}×ম^১=\frac{৫৪}{১০০}×ম^১=\frac{২৭}{৫০}×ম^১$;

এবং ম^১ $=\frac{১০০×১০০\ ম}{৯০×৬০}=\frac{১০×১০\ ম}{৯×৬}=\frac{১০০\ ম}{৫৪}=$
$=\frac{৫০\ ম}{২৭}$।

এইরূপে যদ্যপি শ সংখ্যক ইং সেকেণ্ডে ও স সংখ্যক ফং সেকেণ্ডে কোন এক কোণ হয় তাহা হইলে

$\frac{শ}{৯০×৬০×৬০}=\frac{স}{১০০×১০০×১০০}$ হইবে; এবং ১০০×১০০×১০০× শ = ৯০×৬০×৬০× স।

$\therefore$ শ $=\frac{৯০×৬০×৬০×স}{১০০×১০০×১০০}=\frac{৯×৬×৬×স}{২০×১০×১০}=\frac{৮১}{২৫০}×স$;

এবং স $=\frac{১০০×১০০×১০০×শ}{৯০×৬০×৬০}=\frac{১০×১০×১০শ}{৯×৬×৬}=\frac{২৫০×শ}{৮১}$;

এক্ষণে বিবেচনা কর যে ১00 গ্রেড = ৯0 ডিগ্রী, সুতরাং ১ গ্রেডে = $\frac{১}{১০০}$×৯0, ডিগ্রীর = .৯ এক ডিগ্রী অতএব গ্রেডকে ডিগ্রী করিতে হইলে, .৯ দিয়া গ্রেডকে গুণ কর, ও ডিগ্রীকে গেরেড করিতে হইলে .৯ দিয়া ভাগ কর। যথা— কোন কোণে যদি ৬0^{গ} থাকে তাহাতে কত ডিগ্রী আছে

তাহা জানিতে হইলে ৬০কে .৯ দিয়া গুণ কর অর্থাৎ ৬০×.৯ =৫৪.০ অর্থাৎ ৫৪° আছে, যদি কোন কোণে ৫৪° থাকে তাহাকে গ্রেডে করিতে গেলে .৯ দিয়া ভাগ কর যথা—
$\frac{৫৪}{৯} = \frac{৫৪০}{৯} =$ ৬০ অর্থাৎ ৬০গ আছে। যদিও এরূপ ফরাসী কোণাংশ এক্ষণে প্রচলিত নাই বটে, কিন্তু পূর্ব্বে এইরূপ অংশ ফরাসীদেশে ছিল, ইহা ছাত্রদিগকে জ্ঞাত করাইবার নিমিত্ত, এবং তৎসম্বন্ধীয় অঙ্ক ও বিষয় চালনা করাইবার নিমিত্ত বিলিখিত হইল।

এক্ষণে (ইউক্লিডের) প্রথম অধ্যায়ের ৩২ প্রতিজ্ঞার ১ম অনুমানে জানা যাইতেছে যে, এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরস্থ কোণ সকল চারি সমকোণের সহিত, বাহুর দ্বিগুণিত সমকোণের সমান হয়।

তন্নিমিত্ত যদ্যপি কোন এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের বাহু ন সংখ্যক ধরা হয়, তাহা হইলে তাহার অন্তরস্থ কোণও ন সংখ্যক হইবে। অতএব ঐ অন্তরস্থ কোণ সকলের সংযোগ অর্থাৎ ন সংখ্যক কোণ + ৪×৯০ = ২ন × ৯০°; কিম্বা সংযুক্ত ন সংখ্যক কোণ = (২ন—৪) ৯০° = (ন—২) ২×৯০° = (ন—২)×১৮০° যথা—

১ম, ২য়, ৩য় ক্ষেত্রে দৃষ্টি করিলে দেখা যাইবে যে ক, খ, গ, ঘ, চ, ছ, জ, ও ঝ এই সকল অক্ষর দ্বারা উক্ত বহুভুজ ক্ষেত্র সকল অঙ্কিত হইয়াছে, এবং ইহার বাহু সকল কখ, খগ, গঘ, ঘচ, চছ, ছজ, জঝ, ও ঝক। এক্ষণে বীজগণিতের ন্যায় এই সকল বাহুর সংখ্যা যদি ন ধরা যায় যেরূপ প্রথমতঃ ধরাগিয়াছে তাহা হইলে ইহার অন্তরস্থ কোণ সকলও ন

সংখ্যক হইবে, এবং এই ন সংখ্যক কোণ সকল + ৪ × ৯০° = ২ন × ৯০°, কিম্বা ন সংখ্যক কোণসমষ্টি = (২ন—৪) × ৯০° = (ন—২)×২×৯০° = (ন—২)×১৮০° হইবে, আর ঐরূপ বহু-ভুজ ক্ষেত্র যদ্যপি সমবাহুক হয় অর্থাৎ ঐ ক্ষেত্রের বাহু সকল যদি পরস্পর পরিমাণ সমান হয়; ও তাহার ভিতরস্থ কোণ সকল যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ইহার ন কোণ সকল পরস্পর সমান হইবে। সুতরাং ইহার প্রত্যেক কোণ = $\frac{\text{ন—২}}{\text{ন}}$ × ১৮০° হইবে। যথা ন যদ্যপি ৩ হয়, তবে উহা ত্রিভুজক্ষেত্র অতএব প্রত্যেক সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ = $\frac{\text{৩—২}}{\text{৩}}$×১৮০° = $\frac{\text{১}}{\text{৩}}$ × ১৮০° = ৬০°; আর ন যদি ৪ হয়, তবে উহা বর্গক্ষেত্র; উহার প্রত্যেক কোণ $\frac{\text{৪—২}}{\text{৪}}$×১৮০° = $\frac{\text{২}}{\text{৪}}$ × ১৮০° = $\frac{\text{১}}{\text{২}}$×১৮০° = ৯০°; আর ন যদি ৮ হয় তাহা হইলে, ঐ সমবাহুক অষ্টভুজ ক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ $\frac{\text{৮—২}}{\text{৮}}$×১৮০° = $\frac{\text{৬}}{\text{৮}}$×১৮০° = $\frac{\text{৩}}{\text{৪}}$×১৮০° = ১৩৫° হইবে। এইরূপ যত বহুভুজ সমবাহুক ক্ষেত্র হইবে তাহার প্রত্যেক কোণ এই প্রকারে নির্ণীত হইবে।

আরও ইউক্লিডের ১ অধ্যায় ১৫ প্র, দ্বিতীয় অনুমানে জানা আছে যে কোন এক সরল রৈখিক, সমকোণি সমবাহুক বহুভুজ ক্ষেত্রের মধ্যস্থ কোণ সকল অর্থাৎ ইহার উপরি অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ সকল একত্র যোগে ৪ চারি সম-কোণের অথবা ৩৬০° সমান হয়। অতএব এই সমকোণিক সমবাহু বহুভুজ ক্ষেত্রের বাহু সকল যদ্যপি ন সংখ্যক হয়, তাহা হইলে ইহার এক এক বাহুর সম্মুখস্থ (কেন্দ্রস্থ) কোণের

পরিমাণ $= \frac{৩৬০^\circ}{ন}$ হইবে। এবং এক এক বাহুর সম্মুখস্থ পরিধি কোণের পরিমাণ $= \frac{১৮০^\circ}{ন}$ হইবে।

দ্বিতীয় উদাহরণমালা।

•১।—১৯গ, ৩২.গ২৭ ও ২৫'—১" এর কমপ্লীমেণ্ট কত ?

২। ৫গ২'—৩", ৮৮গ.০০০৬, ও ২৩৩গ.২০০৯ এর সপ্লীমেণ্ট কত ?

৩। ২৭গ২৭'—২৭" কে ইংরাজী পরিমাণে আন। এবং ঐ ইংরাজী পরিমাণের কমপ্লীমেণ্টই বা কত ? আর ঐ কমপ্লীমেণ্টকে গ্রেড মিনিট ইত্যাদি কর।

৪। ১° এবং ১" কে ফরাসী পরিমাণে ব্যক্ত কর। ও ১গ এবং ১' কে ইংরাজী পরিমাণে লিখ।

৫। কোন দুই কোণের পরিমাণ সমষ্টি ১০৫°, এবং উহাদের অন্তর ৪৫° এই দুই কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ কত ?

৬। কোন ২ দুইটী কোণের অন্তর ১০গ এবং তাহাদের সমষ্টি ৪৫°; এই দুইটী কোণের প্রত্যেকের পরিমাণ কত হইবে ?

৭। ২'—৫" কে গ্রেডের দশমিকে প্রকাশ কর ?

৮। যদ্যপি সমকোণের $\frac{১}{৩}$ এক তৃতীয়াংশকে কোণের নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ ধরা যায়, তাহা হইলে ঐরূপ কত সংখ্যাতে ৭৫° হইবে।

৯। যদ্যপি ১৪৬$\frac{২}{৩}$ গ্রেড, এক নির্দ্দিষ্ট ডিগ্রী পরিমাণের ৭১ গুণ হয়, তাহা হইলে নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ কত ডিগ্রী হইবে ?

১০। যদ্যপি কোন এক কোণ ফং সেকেণ্ডেতে প্রকাশিত থাকে, তাহাকে ইংরাজী সেকেণ্ড করিতে হইলে, উহাকে ·৩২৪ দিয়া গুণ করিলেই হয়; "তাহার কারণ কি প্রকাশ কর।"

১১। কোন এক কোণের পরিমাণ ক ডিগ্রী পরিমিত আছে। ইহাকে এমত দুই অংশে বিভক্ত কর, যে এক অংশে যত ইংরাজী মিনিট হইবে, অপর অংশে তত ফরাসী মিনিট থাকিবে?

১২। এক সমকোণের $\frac{২}{৩}$ অংশকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যে তাহাদের অনুপাত, ৩ : ১০ এর সহিত অনুপাতের সমান হয়?

১৩। দুইটী সরল রৈখিক সমবাহু বহুভুজ ক্ষেত্র আছে ইহাদের মধ্যে একটীর বাহু সংখ্যার সহিত অন্যটীর বাহু সংখ্যার অনুপাত, ২ : ৩ এর অনুপাতের সমান। এবং একটী ক্ষেত্রে এক একটী কোণে যত গ্রেড আছে অন্যটীর এক এক কোণ তত ডিগ্রী আছে। এই দুইটী ক্ষেত্র প্রত্যেকে কয় বাহুযুক্ত ও তাহাদের অন্তরস্থ এক এক কোণের পরিমাণই বা কত?

১৪। সমবাহু সরল রৈখিক পঞ্চ ভুজ ও ষষ্ঠ ভুজ ক্ষেত্রদিগের অন্তরস্থ এক এক কোণের পরিমাণ কত?

১৫। এক বৃত্তের ভিতরে এক সমবাহুক সরল রৈখিক সপ্ত ভুজ ক্ষেত্র আছে, তাহার এক বাহুর উপরে যদি একটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত করা যায়, যে তাহার শীর্ষকোণ ঐ বৃত্তের পরিধি স্পর্শ করে, তাহা হইলে তাহার

শীর্ষকোণের সহিত ও ভূমিস্থকোণের অনুপাত কি রূপ হইবে।

১৬। কোন এক পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের অন্তরস্থ কোণ সকলের পরস্পর, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ এর পরস্পর অনুপাতের সমান। উহাদের প্রত্যেকের পরিমাণ কত প্রকাশ কর।

১৭। দুইটী বহুভুজ ক্ষেত্র আছে, তাহাদের একের অন্তরস্থ কোণ সকল, অন্যের অন্তরস্থ কোণের সহিত, সংযোগ ও বিয়োগ বিশিষ্টের সমষ্টি ৪ সমকোণের সমান। এবং একটীর অন্তরস্থ কোণের সমষ্টির সহিত অন্যের অন্তরস্থ কোণের অনুপাত ৫ : ৩ অনুপাতের সমান। তাহার এক এক ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা কত ?

১৮। এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরস্থ কোণ সকল পাটীক প্রপোর্যাণ আছে। তাহার সর্ব্বকনিষ্ঠ কোণের পরিমাণ ১২০°; এবং উহাদের সাধারণ অন্তর ৫°, এই ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যা কত।

দ্বিতীয় অধ্যায়।

বৃত্তিক পরিমাণ।

আমরা ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ড ও গ্রেড, মিনিট, সেকেণ্ড ইত্যাদি; এই দুই প্রকার পরিমাণ কোণ বিষয়ে প্রকাশ করিয়াছি, এবং ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ড ইত্যাদি পরিমাণ দ্বারা যে এক্ষণে সদা সর্ব্বদা সাধারণ কার্য্যের হিসাব চলিতেছে তাহাও নির্দ্দেশ করিয়াছি। এক্ষণে আমরা কোণের পরিমাণ

জানিবার বিষয়ে তৃতীয় আর এক প্রকার যে ধারা আছে, তদ্বিষয় প্রকাশ করিতেছি। ইহাকে বৃত্তিক পরিমাণ কহা যায়। এই বর্ত্তমান পরিচ্ছেদে নিম্ন-লিখিত প্রতিজ্ঞাটী সপ্রমাণ করিব, এবং ইহা কিরূপ কার্য্যোপযোগী তাহাও প্রদর্শন করিব। প্রতিজ্ঞাটী এই—কোন দুই সরল রেখা এক বিন্দুতে যুক্ত হইলে, ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথেচ্ছাদূরে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া যদি এক বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে, ঐ দুই সরল রেখাদ্বারা যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহার পরিমাণ এই; যে ঐ বৃত্তাংশ যাহা উক্ত দুই সরল রেখার অন্তর্গত আছে, তাহাকে সরল রেখা করিলে যে পরিমাণ হয়, ঐ পরিমাণ ব্যাসার্দ্ধের সহিত যে অনুপাত করিবে অর্থাৎ $\frac{\text{বৃত্তাংশ সরল রেখা}}{\text{ব্যাসার্দ্ধ}}$ যাহা হইবে, তাহাই উক্ত কোণের পরিমাণ হইবে। উপরোক্ত প্রতিজ্ঞাটী জানিতে হইলে অগ্রে অন্য ২।১ টী প্রতিজ্ঞা বিশেষরূপে জানা আবশ্যক, অতএব আমরা তদ্বিষয়ে প্রথমে প্রকাশ করিতেছি।

প্রতিজ্ঞা—ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের পরিধি অংশ সকল তাহাদের ব্যাসার্দ্ধের সহিত অনুপাতীয় হয়।

কখ, ও চছ দুইটী বৃত্ত, ইহাদের পরিধির পরস্পর অনুপাত, ব্যাসার্দ্ধের সহিত অনুপাতের সমান হইবে।*

কখ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ অ হউক, এবং পরিধি আ হউক। আর অন্য বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ ব ও পরিধি প হউক। এবং মনে কর কখ, চছ ঐ দুই বৃত্তের অন্তরস্থ দুই সমকোণি সমবাহুক বাহুভুজ ক্ষেত্র হউক। আর উহাদের প্রত্যেকের বাহু-

* চিত্র ৪ দেখ।

সমষ্টি ন সংখ্যক হউক। এক্ষণে ইঃ ৩য় অ ২৭ সংদ্বারা কখ, চছ বাহুর সম্মুখস্থ (কেন্দ্রস্থ) কোণদ্বয় পরস্পর সমান, (ই ১ম অ, ১১সং) গক, ও গঘ ; এবং জক ও জছ পরস্পর সমান হওয়াতে গকখ ও জচছ দুই ত্রিভুজ সমদ্বিবাহুক। সুতরাং উহারা উভয়ে একাকার সমকোণিক ক্ষেত্র। এজন্য (ইউ, ৬অ, ৪প্র) দ্বারা কখ : চছ : : কগ : চজ ; এবং এই দুই বাহুভুজ ক্ষেত্রের মধ্যে একটীর বাহুসমষ্টিকে যদি শ কহা যায়, আর অন্য আর একটীর বাহুসমষ্টিকে যদি স কহা যায়, তাহা হইলে শ : স : : ন × কখ : ন × চছ : : কগ : চজ : অ : ব, হইবে।

এক্ষণে ঐ সরল রৈখিক বহুভুজ ক্ষেত্রদিগের বাহুসংখ্যা যদি ক্রমশঃ অপরিমিত বৃদ্ধি কর, তাহা হইলে ঐ বহুভুজ ক্ষেত্রদিগের বাহুর দীর্ঘতা হ্রস্ব হইয়া এই দুই ক্ষেত্রের অন্তরস্থ স্থান সকল ক্রমে ক্রমে দুইটী বৃত্তের সমতুল্য হইবে, ও ইহাদের বাহু সকলের সমষ্টির দুই পরিধির সমতুল্য হইবে। অতএব শ = আ—হ, স = প—ক্ষ হউক। এ স্থানে হ ও ক্ষ কে পরিধি ও তদন্তর্গত বহুভুজ ক্ষেত্রদিগের অন্তর সমষ্টি। যদি বহুভুজ ক্ষেত্রদিগের বাহুসংখ্যা যৎপরোনাস্তি বৃদ্ধি করা যায়, তাহা হইলে ইহাদের পরিমাণ যৎপরোনাস্তি স্বল্প করা যাইতে পারে। আর আ—হ : প—ক্ষ : : অ : ব ; তাহা হইলে ব.আ—ব.হ = অ.প—অ.ক্ষ, হইবে, তন্নিমিত্ত ব.আ—অ.প = ব.হ—অ.ক্ষ ; এস্থলে ব.হ, অ.ক্ষ ইহাদের প্রত্যেককে যৎপরোনাস্তি স্বল্প, এবং তজ্জন্য উহাদের বিয়োগ ব.হ—অ.ক্ষ কেও যৎপরোনাস্তি স্বল্প করা যাইতে পারে। অধিক কি বোধগম্য পরিমাণের অপেক্ষাও অল্প করা যাইতে পারে,

যদি উক্ত বাহুভুজ ক্ষেত্রদিগের বাহু সকলের সংখ্যা তদুপযুক্ত পরিমাণে বৃদ্ধি করা যায়।

আবার যদ্যপি ব.আ—অ.প = কোন এক নির্দ্দিষ্ট পরিমাণের সহিত সমান হয়, তাহা যেন ক হউক, তাহা হইলে ব.হ—অ.ক্ষ কে এই নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ ক অপেক্ষা কখনই স্বল্প করা যাইতে পারে না; সুতরাং তাহা এস্থলেও কখন হইতে পারে না, কারণ ঐ সরল রৈখিক ক্ষেত্রদিগের বাহুসংখ্যা যথেচ্ছা-পরিমাণে বৃদ্ধি করা যায়, ও উহাদের বিয়োগ যথেচ্ছা স্বল্প করা যাইতে পারে। অতএব এইরূপে অগণিতসংখ্যা যদ্যপি উহাদের বাহু সকলের বৃদ্ধি করা যায় তাহা হইলে হ ও ক্ষ = ০ হইবে। সুতরাং ব.আ—অ.প = ০ হইবে অথবা ব.আ = অ.প হইবে। ও $\frac{\text{আ}}{\text{অ}} = \frac{\text{প}}{\text{ব}}$ হইবে তাহা হইলেই আ : প : : অ : ব, হইবে। অতএব ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের পরিধি সকল তাহাদের ব্যাসার্দ্ধের সহিত অনুপাতীয় অর্থাৎ $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাসার্দ্ধ}}$ হয়।

অতএব এইরূপ এক বৃত্তের পরিধি তাহার ব্যাসার্দ্ধের যে অনুপাত হয় সে অনুপাত নির্দ্দিষ্ট হয়, সুতরাং পরিধির সহিত ব্যাসের অনুপাতও নির্দ্দিষ্ট হয়। বৃত্তের আকার যত ন্যূনাধিক হউক না কেন, তাহাতে অনুপাতের কোন বৈলক্ষণ্য হয় না। পরিধির সহিত ব্যাসের যে অনুপাত তাহা নির্দ্দিষ্ট হয় বটে কিন্তু তাহার অঙ্ক পরিমাণ ঠিক সূক্ষ্মরূপে প্রকাশ করা যায় না। আর এই অনুপাতের অঙ্ক পরিমাণ যতদূর পর্য্যন্ত কার্য্যোপযোগী সূক্ষ্ম হিসাব আবশ্যক তাহার আসন্ন পরিমাণ এই $\frac{২২}{৭}$; এবং ইহার

অপেক্ষা আরও সূক্ষ্ম পরিমাণ $\frac{৩৫৫}{১১৩}$ হয়। ইহার সূক্ষ্ম পরিমাণ ৮টী দশমিকের স্থান পর্য্যন্তই যথেষ্ট, তাহা এই ;—৩.১৪১৫৯২৬৫।

π = এই চিহ্নটী যাহাকে গ্রীকে পাই কহিয়া থাকে, তাঁহা সচরাচর $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}$ এর যে অনুপাত তাহাই প্রকাশ করে অর্থাৎ π=৩.১৪১৫৯২৬৫ ; অতএব যদ্যপি ১ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ ধরা যায় তাহা হইলে উহার পরিধির পরিমাণ ২πব হইবে।

কারণ $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$;

∴ পরিধি = π × ব্যাস ;

কিন্তু ব্যাস = ২ব,

অতএব পরিধি = π × ২ ব

= ২ π ব হইবে।

প্রতিজ্ঞা। যদি কোন এক বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণের তলস্থ পরিধিখণ্ডকে সরল রেখা করিলে উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান হয় তাহা হইলে ঐ কেন্দ্রস্থ কোণটী নির্দ্দিষ্ট কোণ হয়।

ক বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও ক খ কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর,* এবং খ গ এই বৃত্তের এক পরিধি অংশ যাহাকে সরল রেখা করিলে কখ ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান। তাহা হইলে পূর্ব্বে যেমন দেখান গিয়াছে যে কেন্দ্রস্থ কোণ সকল তাহাদের তলস্থ পরিধি অংশ সকলের সহিত অনুপাতীয় হয়, তজ্জন্য—

---

* চিত্র ৫ দেখ।

$$\frac{\text{কোণ খ ক গ}}{\text{৪ সমকোণ}} = \frac{\text{পরিধি অংশ খগ}}{\text{পরিধি}} = \frac{\text{ব}}{\text{২}\pi\text{ব}} = \frac{১}{২\pi};$$

$$\therefore \text{খকগ} \angle \text{ কোণ} = \frac{\text{৪ সমকোণ}}{২\pi}।$$

অতএব দেখ কোণ খ ক গ, ৪ সমকোণের কোন এক ভগ্নাংশ, যাহার পরিমাণ নির্দ্দিষ্ট হয়। উহার ব্যাসার্দ্ধ যেমন হউক না কেন।

যেহেতু সেই কেন্দ্রস্থ কোণ যাহার তলস্থ পরিধি অংশকে সরল রেখা করিলে উহার ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান হওয়াতে ঐ কোণ নির্দ্দিষ্ট কোণ হয় বলিয়া উহাকে কোণের পরিমাণ মাপের জন্য নির্দ্ধারিত এক মাপ ধরা যাইতে পারে। এবং তজ্জন্য কোন কোণের পরিমাণ জানিতে হইলে, এই কোণ উক্ত নির্দ্দিষ্ট কোণের সহিত যে অনুপাত প্রকাশ করে, তাহাই ঐ কোণের পরিমাণ হয়। যথা—

খ ক ঘ এক কোণ হউক,* ও ক বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ক খ কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, খ গ ঐ বৃত্তের এমন এক পরিধি অংশ হউক যাহাকে সরল রেখা করিলে ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান হয়, ও ব্যাসার্দ্ধের নাম ব, এবং ঐ খ ক ঘ কোণের তলস্থ পরিধি অংশের নাম ল হউক।

এক্ষণে কেন্দ্রস্থ কোণ সকল তাহাদের আপন আপন তলস্থ পরিধি অংশের সহিত অনুপাতীয় হয়, তজ্জন্য

$$\frac{\text{কোণ খ ক ঘ}}{\text{কোণ খ ক গ}} = \frac{\text{পরিধি অংশ খ ঘ}}{\text{পরিধি অংশ খ গ}} = \frac{\text{ল}}{\text{ব}};$$

অতএব কোণ খ ক ঘ $= \frac{\text{ল}}{\text{ব}} \times$ কোণ খ ক গ। কোণের পরি-

* চিত্র ৫ দেখ

মাণ মাপিবার নির্দ্দিষ্ট মাপ যাহা হউক না কেন, এই ফলের বৈলক্ষণ্য হয় না। যদ্যপি ঐ নির্দ্দিষ্ট কোণ খ গ ক কে মাপ বিষয়ে এক বলিয়া গণনা করা যায়, তাহা হইলে এই কোণের পরিমাণ ১ হইবে; তাহা হইলেই কোণ খ ক ঘ = $\frac{ল}{ব}$ হইবে।

অতএব ইহাতে সপ্রমাণ হইল যে, কোন কোণের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে একটী ভগ্নাংশ দ্বারা উহার পরিমাণ প্রকাশ করা যায়, যে ভগ্নাংশের ল ব, ঐ কেন্দ্রস্থ কোণের তলস্থ পরিধি অংশ, আর ক খ ঐ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ হয়।

এইমত কোণের পরিমাণ বিষয়ে যে নির্দ্ধারিত মাপ অর্থাৎ যে কোণকে ১ বলিয়া গণনা করা হইয়াছে, ঐ কোণকে এরূপ বুঝিতে হইবে যাহার তলস্থ পরিধি অংশ ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান।

আরো দেখান গিয়াছে যে এই কোণের পরিমাণ হয় $\frac{৪ \text{ সমকোণ}}{২\pi}$; অতএব এই কোণের ডিগ্রী পরিমাণের সংখ্যা হয় $\frac{৩৬০}{২\pi}$, কিম্বা $\frac{১৮০}{\pi}$;। যদ্যপি এই π এর আসন্ন পরিমাণ যাহা ৩.১৪১৫৯ তে দেখান গিয়াছে এস্থানে ব্যবহার করা যায়, তাহা হইলে $\frac{১৮০}{\pi} = \frac{১৮০}{৩.১৪১৫৯২৬৫,} = ৫৭.২৯৫৭৭৯$ ৫১........হইবে; এই সংখ্যক ডিগ্রী পরিমাণ ঐ কোণেতে আছে, অর্থাৎ যে কোণের তলস্থ পরিধি অংশ উহার ব্যাসার্দ্ধের সমান।

এইরূপ পরিধিঅংশ ভাজক ব্যাসার্দ্ধ এই ভগ্নাংশদ্বারা

বিস্তারিত কোণ সকলের পরিমাণ ২ দুই প্রকারে জানা যাইতে পারে যথা—$\frac{২}{৩}$ কোণ বলিলে, ১ম তঃ; ঐ নির্দ্দিষ্ট এক কোণে (যাহা অনুান ৫৭ ডিগ্রী হয়) তাহার সহিত গণনা করিলে ঐ বিস্তারিত কোণের পরিমাণ ৫৭ ডিগ্রীর $\frac{২}{৩}$ সংখ্যক হয়, ২য় তঃ। এই নির্দ্দিষ্ট এক কোণকে গণনায় না ধরিয়া যদ্যপি ব্যাসার্দ্ধের সহিত গণনা করা যায় তাহা হইলে ঐ বিস্তারিত কোণের তলস্থ পরিধি অংশের পরিমাণ উহার ব্যাসার্দ্ধেরও $\frac{২}{৩}$ ধরা যাইতে পারে।

পরিধিঅংশ ভাজক ব্যাসার্দ্ধ এই ভগ্নাংশকেই কোণের বৃত্তিক পরিমাণ কহা যায়।

যদ্যপি এক বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধকে ব কহা যায়, তাহা হইলে পরিধি পরিমাণ ২π ব হইবে। আর চারি সমকোণের বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{২\pi ব}{ব}$ অর্থাৎ ২π হইবে, ও দুই সমাকোণের বৃত্তিক পরিমাণ π হইবে। এবং এক সমকোণের বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{\pi}{২}$ হইবে, যদি ন সমকোণের সংখ্যা ধরা যায় তাহা হইলে $\frac{ন\ \pi}{২}$ ইহাই ঐ ন সংখ্যক সমকোণের বৃত্তিক পরিমাণ হইবে, এস্থানে ন অখণ্ডরাশি কিম্বা ভগ্নাংশিক হউক।

এক্ষণে কোণের বৃত্তিক পরিমাণকে উহার ডিগ্রী পরিমাণের সহিত কিপ্রকার পরিবর্ত্ত করিবে তাহা জানান যাইতেছে। কোন এক দত্ত কোণের ডিগ্রী পরিমাণ ড সংখ্যক ধরা যায় ও ইহার বৃত্তিক পরিমাণ ক্ষ সংখ্যক হয়*

* অর্থাৎ উক্ত কোণের তলস্থ পরিধি অংশেতে উহার ব্যাসার্দ্ধ যত সংখ্যক বার আছে, তাহার সংখ্যা ক্ষ।

তাহা হইলে দুই সমকোণে ১৮০° আছে, তন্নিমিত্ত $\frac{ড}{১৮০}$ দুই সমকোণের সহিত অনুপাতীয়। এবং দুই সমকোণের বৃত্তিক পরিমাণ π হয় সুতরাং $\frac{ক্ষ}{\pi}$ ও দুই সমকোণের সহিত অনুপাতীয়।

উভয় পরিমাণই দুই সমকোণের অনুপাতীয় সুতরাং

$$\frac{ড}{১৮০} = \frac{ক্ষ}{\pi};$$

$\therefore ড = \frac{১৮০\ ক্ষ}{\pi}$; ও $ক্ষ = \frac{\pi . ড}{১৮০}$ হইবে।

উদাহরণ যথা।—১ ডিগ্রী পরিমাণের কোণ হইলে তাহার বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{\pi}{১৮০}$ হইবে। কোণের পরিমাণ ১০ ডিগ্রী হইলে, তাহার বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{১০\ \pi}{১৮০}$ হইবে, কোণের পরিমাণ অর্দ্ধ ডিগ্রী হইলে তাহার বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{\pi}{১৮০} \times \frac{১}{২}$ হইবে। কোন এক কোণের পরিমাণ যদ্যপি এক মিনিট হয়, তাহার বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{\pi}{১৮০ \times ৬০}$ হইবে। এক সেকেণ্ড পরিমাণ কোণের বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{\pi}{১৮০ \times ৬০ \times ৬০}$ হইবে, এইরূপ অন্যান্য কোণ সকলের বৃত্তিক পরিমাণ জানা যাইবে।

আবার যদ্যপি এক কোণের বৃত্তিক পরিমাণ $\frac{৩}{৪}$ হয় তাহা হইলে ঐ কোণের ডিগ্রী পরিমাণ কত? $\frac{৩}{৪} \times \frac{১৮০}{\pi}$ হইবে। অর্থাৎ $\frac{৩}{৪} \times \frac{১৮০}{\pi}$ বা $\frac{৩}{৪} \times ৫৭.২৯৫৭৭৯৫ \cdots\cdots$ ইত্যাদি হইবে।

যদ্যপি কোন এক কোণের বৃত্তিক পরিমাণ ১০ হয় তবে তাহার ডিগ্রী সংখ্যা $১০ \times \frac{১৮০}{\pi}$ অর্থাৎ $১০ \times ৫৭.২৯৫৭৭৯৫ \ldots$ হইবে। এইরূপ অন্যান্য কোণও লইতে হইবে।

এই মত কোণ সকলের পরিমাণ নির্ণয় করিবার বিষয়ে ছাত্রদিগকে বিশেষ মনোযোগী হইতে অনুরোধ করা যাই-তেছে যে যেন তাঁহারা কোণ সকলের ডিগ্রী পরিমাণ জানিতে পারিলেই যেন তাহার বৃত্তিক পরিমাণ মুখে মুখে কশিতে পারেন।

এইরূপে কোণের বৃত্তিক পরিমাণকে উহার গ্রেড পরি-মাণে পরিবর্ত্ত করা যাইতে পারে। যথা—যদ্যপি কোন এক কোণের গ্রেড পরিমাণকে গ কহা যায় আর ঐ কোণের বৃত্তিক পরিমাণকে ক্ষ কহা যায় তাহা হইলে ২ দুই সমকোণের সহিত দুই প্রকার অনুপাত প্রকাশ করা যাইতে পারে। এক প্রকার। $\frac{গ}{২০০}$ ও অন্য প্রকার $\frac{ক্ষ}{\pi}$; এই দুই অনুপাত দুই সমকোণের সহিত হওয়াতে $\frac{গ}{২০০} = \frac{ক্ষ}{\pi}$ হইবে।

$$\therefore \quad গ = \frac{২০০ ক্ষ}{\pi} \text{ ও } ক্ষ = \frac{\pi . গ}{২০০} \text{ হইবে।}$$

যে কোন বৃত্তিক পরিমাণের নির্দ্দিষ্ট ১ মাপ হয়, তাহাতে গ্রেড সংখ্যা এত $\frac{২০০}{\pi}$ অর্থাৎ ৬৩.৬৬১৯৭৭ .... ইত্যাদি হইবে।

তৃতীয় অধ্যায়।

ত্রিকোণমিতি-সম্বন্ধীয় অনুপাত। (Ratio.)

খকগ কোন এক কোণ হউক, আর যে দুই সরল রেখার দ্বারা এই কোণ উৎপন্ন হইয়াছে তাহাদের একটী রেখাতে একটী বিন্দু লও, এবং ঐ বিন্দু হইতে অপর রেখার উপরে একটী লম্ব টান, যথা কগ রেখার মধ্যে প বিন্দু লও, ও পম লম্ব কখ রেখার উপরে টান, (আমরা খকগ ∠ কে ক ∠ নামে ব্যক্ত করিব) তাহা হইলে *

১। $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{কর্ণ}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের শাইন বলা যায়।

২। $\frac{\text{কম}}{\text{কপ}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{কর্ণ}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের কোশাইন বলা যায়।

৩। $\frac{\text{পম}}{\text{কম}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের টেঞ্জেণ্ট বলা যায়।

৪। $\frac{\text{কম}}{\text{পম}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের কোটেঞ্জেণ্ট কহা যায়।

৫। $\frac{\text{কপ}}{\text{কম}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{কর্ণ}}{\text{ভূমি}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের সিকণ্ড কহা যায়।

---

* চিত্র ৬ দেখ।

৬। $\frac{\text{কপ}}{\text{পম}}$ অর্থাৎ $\frac{\text{কর্ণ}}{\text{লম্ব}}$ ইহাকে ক ∠ কোণের কোশিকণ্ড বলা যায়।

আর কোশাইন ক, অর্থাৎ ক কোণের কোশাইন যদ্যপি ১ হইতে অন্তর করা যায়, তবে তাহার যে অবশিষ্ট টুকু থাকে তাহাকে ভারসেটশাইন ক∠ কহা যায়। এবং শাইন ক∠ কে যদ্যপি ১ হইতে অন্তর করা যায়, তার অবশিষ্টকে কোভারসেট-শাইন ক∠ কহা যায়। এই শেষ উক্তটী কদাচিত কার্য্যে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

শাইন, কোশাইন, টেঞ্জেণ্ট, ও কোটেঞ্জেণ্ট, শিকণ্ড, কোশিকণ্ড, ভারসেট-শাইন, কোভারসেট-শাইন এই সকল-গুলিকে সম্পূর্ণরূপে না লিখিয়া তাহাদিগকে সংক্ষেপে লেখা যাইবে। এই মতে উপরি লিখিত সংজ্ঞা সকল নিম্নলিখিত রূপে প্রকাশ করা যাইবে। কিন্তু পঠনকালীন সম্পূর্ণরূপে তাহাদের উচ্চারণ করিতে হইবেক।

(১) শান. ক $= \frac{\text{পম}}{\text{কপ}}$ অর্থাৎ শাইন ক।

(২) কোশ. ক $= \frac{\text{কম}}{\text{কপ}}$ অর্থাৎ কোশাইন ক।

(৩) টেন. ক $= \frac{\text{পম}}{\text{কম}}$ অর্থাৎ টেঞ্জেণ্ট ক।

(৪) কোট. ক $= \frac{\text{কম}}{\text{পম}}$ অর্থাৎ কোটেঞ্জেণ্ট ক।

(৫) শিক. ক $= \frac{\text{কপ}}{\text{কম}}$ অর্থাৎ শিকণ্ড ক।

(৬) কোশিক. ক $= \frac{\text{কপ}}{\text{পম}}$ অর্থাৎ কোশিকণ্ড ক।

(৭) ভারশ. ক = ১—কোশ. ক, অর্থাৎ ভারশেটশাইন ক।

(৮) কোভারশ. ক = ১—শান. ক, অর্থাৎ কোভারশেট শাইন ক।

এই শাইন, কোশাইন, টেঞ্জেণ্ট, কোটেঞ্জেণ্ট, শিকণ্ড কোশিকণ্ড, ভারশেটশাইন, কোভারশেটশাইন এই সকলকে ত্রিকোণমিতি-রেশীও কিম্বা ত্রিকোণমিতির ফংশন কহা যায়। ত্রিকোণমিতিতে অধিকাংশই কোণের এই সকল রেশীও ও ফংশনদের গুণ ও পরস্পরের সম্বন্ধ প্রকাশ করে। পশ্চাৎ জানা যাইবে যে এই সকল ফংশন দ্বারা রেখা সকলের পরিমাণ প্রকাশ করে না, কেবল তাহাদের পরস্পরের সহিত যে অনুপাত তাহাই মাত্র প্রকাশ করে। এই অনুপাত সকল অঙ্কদ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহারা অখণ্ডরাশি ও ভগ্নাংশিক রাশি উভয়ই হইতে পারে। যথা পম যদ্যপি ৩ হয় ও কম যদ্যপি ৪ হয়, ইহাদের একটী পরিমাণ ফুট কিম্বা গজ অথবা মাইল ধর তাহা হইলে—

কপ = $\sqrt{(১৬+৯)}$ = ৫ হইবে (ইউক্লিড ১।৪৭ প্র)

অএব কপ = ৫ত হইলে, শান. ক = $\frac{পম}{কপ} = \frac{৩}{৫}$ হইবে। এবং

কোশ. ক = $\frac{কম}{কপ} = \frac{৪}{৫}$ হইবে। ও টেন. ক = $\frac{পম}{কম} = \frac{৩}{৪}$ হইবে; ইত্যাদি।

এক সমকোণ হইতে যে কোন এক কোণ অন্তর করিলে যাহা অবশিষ্ট থাকে, তাহাকে উহার কমপ্লিমেণ্ট কোণ কহা যায়, এইক্ষণে যদি কোন এক কোণের ডিগ্রীসংখ্যা যদ্যপি ক হয় তাহা হইলে, ৯০—ক = যে অন্তর ফলহইবে, তাহাকে

ক কোণের কমপ্লিমেণ্ট-কোণ কহা যায়। আবার ঐ অন্তর কোণের কমপ্লিমেণ্ট কোণ = ক কোণ হয়।

এই সকল কমপ্লিমেণ্ট কোণদ্বারা কতকগুলিন ত্রিকোণ-মিতি-সম্বন্ধীয়-রেশীও (অনুপাত) সকল আর এক প্রকারে প্রকাশ করিবার উপায় হইয়াছে যথা—কোন এক সূক্ষ্ম কোণের কোশাইন ইহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের শাইন।

কোন এক কোণের কোটেঞ্জেণ্ট ইহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের টেঞ্জেণ্ট।

কোন এক কোণের কোশিকণ্ড ইহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের শিকণ্ড কহা যাইবে।

কারণ, মনে কর, কপম * একটী সমকোণি ত্রিভুজ আছে, ম বিন্দুতে উহার সমকোণ; ঐ স্থানে যেমন উপরে কহা গিয়াছে তদনুসারে কপম কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট-কোণ ক কোণ; এবং ক কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট কোণ, কপম কোণ হইবে। এবং—

$$\text{শান. কপম} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{কর্ণ}} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \text{কোশ. ক।}$$

$$\text{টেন. কপম} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{কম}}{\text{মপ}} = \text{কোটেন. ক।}$$

$$\text{শিক. কপম} = \frac{\text{কর্ণ}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{কপ}}{\text{মপ}} = \text{কোশিক. ক।}$$

এই সকল ফলকে এইরূপে প্রকাশ করা যায় যথা—

এক কোণের শাইন উহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের কোশা-ইন; এবং এক কোণের টেঞ্জেণ্ট উহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের কোটেঞ্জেণ্ট, আর এক কোণের শিকণ্ড উহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের কোশিকণ্ড হয়।

* চিত্র ৬ দেখ।

যদবধি কোণ সকলের কোন পরিবর্ত্তন না হয়, তদবধি ইহাদের ত্রিকোণমিতি-সম্বন্ধীয় (রেশীও) অর্থাৎ অনুপাতেরও কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

এক্ষণে খকগ এক কোণ হউক; কগ রেখাতে প একটী বিন্দু লও এবং প বিন্দু হইতে কখ রেখার উপর একটী লম্ব টান যথা পম। আর ঐরূপে প১ম১ * আর এক লম্ব কখ রেখার উপরে টান, তাহা হইলে কপম ও কপ১ম১ এই দুইটী সমকোণিক ত্রিভুজ হইবে। সুতরাং উহাদের সম-কোণের পার্শ্বস্থ বাহু সকল পরস্পর অনুপাতীয় (ইঃ ৬ অ ১৯ প্র)

এজন্য $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{প}^{১}\text{ম}^{১}}{\text{কপ}^{১}}$ = শাইন ক হইবে।

ইহাতে এই সপ্রমাণ হইতেছে যে, কপম ত্রিভুজ কিম্বা কপ১ম১ ত্রিভুজ ইহার যে কোন ত্রিভুজ হইতে ধরা যাউক না কেন, ক কোণের শাইন সমানই থাকিবে। ত্রিকোণ-মিতি-সম্বন্ধীয় অনুপাত এই মত ফল অন্যান্য সকলেতেই হইয়া থাকে। কিম্বা অন্য মত—মনে কর, প২, বিন্দু হইতে কগ রেখার উপরে প২ম২ এক লম্ব রেখা টান তাহা হইলে কপম, ও কপ২ম২, এই দুটীই সমকোণিক ত্রিভুজ দৃষ্ট হইবে। সুতরাং $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{প}^{২}\text{ম}^{২}}{\text{কপ}^{২}}$ = শাইন ক, যেরূপ উপরে প্রদর্শিত হইয়াছে।

ত্রিকোণমিতি-সম্বন্ধীয় রেশীও (অনুপাত) এর মধ্যে পরস্পর যে সম্বন্ধ প্রকাশ করে, এক্ষণে তাহার বিষয় জানান যাইতেছে।

---

* চিত্র ৬ দেখ।

সংজ্ঞাদ্বারা এককালীন নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলিন উপপন্ন হইতেছে যথা—

$$\text{টেন. ক} \times \text{কোট. ক} = ১ \ \therefore \ \text{টেন. ক} = \frac{১}{\text{কোট. ক}};$$

$$\text{এবং কোট. ক} = \frac{১}{\text{টেন. ক}}।$$

$$\text{শিক. ক} \times \text{কোশ. ক} = ১; \text{ অতএব}$$

$$\text{শিক. ক} = \frac{১}{\text{কোশান. ক}}; \text{ এবং কোশ. ক} = \frac{১}{\text{শিক. ক}};$$

$$\text{কোশিক. ক} \times \text{শান. ক} = ১;$$

$$\therefore \text{কোশিক. ক} = \frac{১}{\text{শান. ক}}; \ \text{শান. ক} = \frac{১}{\text{কোশিক. ক}};$$

$$\text{আর টেন. ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কম}} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}} \div \frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{শান. ক}}{\text{কোশ. ক}};$$

$$\text{আর কোটেন. ক} = \frac{\text{কম}}{\text{পম}} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}} \div \frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কোশ. ক}}{\text{শান. ক}};$$

$(\text{শান. ক})^২ + (\text{কোশ ক})^২ = ১$; কারণ $\text{পম}^২ + \text{কম}^২ = \text{কপ}^২$ (ইউ ১।৪৭) অনুসারে।

$$\text{অতএব } \frac{\text{পম}^২}{\text{কপ}^২} + \frac{\text{কম}^২}{\text{কপ}^২} = ১।$$

$$\text{অথবা } \left(\frac{\text{পম}}{\text{কপ}}\right)^২ + \left(\frac{\text{কম}}{\text{কপ}}\right)^২ = ১।$$

$$\text{অর্থাৎ } (\text{শান. ক})^২ + (\text{কোশ. ক})^২ = ১।$$

এস্থানে লেখা যাইতেছে যে $(\text{শান. ক})^২$ ইহাকে সংক্ষেপে $\text{শান}^২ \text{ক}$ এই মত লেখা যাইবে। ও $(\text{কোশ. ক})^২$ $(\text{টেন. ক})^২$ $(\text{শিক. ক})^২$ ইত্যাদিকেও উক্ত মত লেখা যাইবে যথা—

কোশ.^{২} ক ; টেন.^{২} ক ; শিক.^{২} ক ইত্যাদি, এবং আর আর ত্রিকোণমিতি-সম্বন্ধীয় অনুপাত (রেশীও) সকলেরও ক্ষমতা-সূচক রাশি (Power) ঐরূপ লেখা যাইবে। অতএব উপ-রোক্ত অঙ্ক ফলটাকে এইরূপ লেখা গেল। যথা—

শান.^{২} ক + কোশ.^{২} ক = ১।

$\therefore$ শান.^{২} ক = ১—কোশ.^{২} ক ;

আর কোশ.^{২} ক = ১—শান.^{২} ক হইবে।

কিম্বা শান. ক = $\sqrt{(\text{১—কোশ.}^{২}\text{ ক})}$;

আর কোশ. ক = $\sqrt{(\text{১—শান.}^{২}\text{ ক})}$;

$$\text{শিক.}^{২}\text{ ক} = \frac{\text{কপ}^{২}}{\text{কম}^{২}} = \frac{\text{কম}^{২} + \text{পম}^{২}}{\text{কম}^{২}}$$

$$= ১ + \left(\frac{\text{পম}}{\text{কম}}\right)^{২} = ১ + \text{টেন}^{২}\text{ ক}।$$

অতএব শিক. ক = $\sqrt{(\text{১+টেন.}^{২}\text{ ক})}$;

এবং টেন. ক = $\sqrt{(\text{শিক}^{২}\text{ ক—১})}$;

$$\text{কোশিক.}^{২}\text{ ক} = \frac{\text{কপ}^{২}}{\text{পম}^{২}} = \frac{\text{পম}^{২} + \text{কম}^{২}}{\text{পম}^{২}} = ১ + \left(\frac{\text{কম}}{\text{পম}}\right) =$$

$$= ১ + \text{কোট}^{২}\text{ ক}।$$

অতএব কোশিক. ক = $\sqrt{(\text{১+কোট. ক})}$

এবং কোট. ক = $\sqrt{(\text{কোশিক.}^{২}\text{ ক—১})}$ হইবে।

উপরোক্ত ফল সকল এস্থানে একত্রে প্রকাশ করা যাই-তেছে, কারণ আবশ্যক হইলে সকলগুলিই এক স্থানে দৃষ্টি-গোচর হইবে। আর উত্তমরূপ স্মরণ থাকিবার জন্য উহা-দিগের কোণের নাম ক লুপ্ত করা গেল।

১। $শান. = \frac{১}{কোশিক.}$; $কোশ. = \frac{১}{শিক.}$; $টেন = \frac{১}{কোট}$;

$কোট. = \frac{১}{টেন}$; $শিক. = \frac{১}{কোশ}$; $কোশিক. = \frac{১}{শান.}$;

২। $টেন. = \frac{শান.}{কোশ.}$; $কোট. = \frac{কোশ.}{শান.}$;

৩। $শান.^২ + কোশ.^২ = ১$; $শান. = \sqrt{(১—কোশ.^২)}$

$কোশ. = \sqrt{(১—শান^২)}$

৪। $শিক.^২ = ১ + টেন.^২$; $টেন.^২ = শিক.^২—১$,

$\therefore$ $শিক. = \sqrt{(১+টেন.^২)}$; $টেন. = \sqrt{(শিক.—১)}$

৫। $কোশিক.^২ = ১ + কোট.^২$; $কোট.^২ = কোশিক.^২—১$,

$\therefore$ $কোশিক. = \sqrt{(১ + কোট^২)}$;

$কোট. = \sqrt{(কোশিক.^২—১)}$

স্মরণার্থে এস্থানে আরো যোগ করা গেল যে ;

$শান. ক = কোশ. (৯০^\circ—ক)$

আর $কোশ. ক = শান. (৯০—ক)$

উপরোক্ত সংজ্ঞা দ্বারা এক অনুপাতের (রেশীও) নামে আর আর সকল অনুপাত প্রকাশ করা যাইতে পারে। অতএব নিম্নলিখিত অনুপাতিক সম্বন্ধ সকল শান. নামে প্রকাশ করা যাইতেছে ; যথা—

$কোশ. ক = \sqrt{(১—শান.^২ক)}$

$টেন. ক = \frac{শান. ক}{কোশ. ক} = \frac{শান. ক}{\sqrt{(১—শান.^২ ক)}}$

$কোট. ক = \frac{কোশ. ক}{শান. ক} = \frac{\sqrt{(১—শান.^২ ক}}{শান. ক}$

$শিক. ক = \frac{১}{কোশ. ক} = \frac{১}{\sqrt{(১—শান.^২ ক)}}$ ।

$$কোশিক.\ ক = \frac{১}{শান.\ ক};$$

$$ভারস্.\ ক = ১—কোশ.\ ক = ১—\sqrt{১—শান.^{২}\ ক};$$

এইরূপ টেঞ্জেণ্ট দ্বারা ও অন্যান্য অনুপাতের দ্বারা সমুদায় অনুপাতকে প্রকাশ করা যায়; প্রথমতঃ টেঞ্জেণ্ট দেখ;—

$$শান.\ ক = \frac{১}{কোশিক.ক} = \frac{১}{\sqrt{(১+কোট.^{২}ক)}} = \frac{১}{\sqrt{(১+\frac{১}{টেন.^{২}ক})}}$$

$$= \frac{টেন.\ ক}{\sqrt{(১+টেন^{২}ক)}};$$

$$কোশ.\ ক = \frac{১}{শিক্.ক} = \frac{১}{\sqrt{(১+টেন.^{২}ক)}};$$

$$কোট.\ ক = \frac{১}{টেন.\ ক};$$

$$শিক.\ ক = \sqrt{(১+টেন^{২}\ ক)};$$

$$কোশিক.\ ক = \frac{\sqrt{(১—টেন^{২}ক)}}{টেন.\ ক}$$

$$ভারস.\ ক = (১—কোশ.\ ক) = ১—\frac{১}{\sqrt{(১+টেন^{২}ক)}};$$

এক্ষণে আমরা কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট পরিমাণের বিশেষ বিশেষ কোণের ত্রিকোণমিতি-সম্বন্ধীয় অনুপাত সকল প্রকাশ করিব। যথা—

১। ৪৫° পরিমিত কোণের ত্রিকোণমিতিসম্বন্ধীয় অনুঅনুপাত সকলের পরিমাণ প্রকাশ করা যাইতেছে।

খ ক গ কোণকে ৪৫° পরিমিত কোণ মনে কর।* পরে

* চিত্র ৯ দেখ।

ক গ রেখাতে কোন এক বিন্দু নির্দ্দেশ কর যথা প; ঐ প বিন্দু হইতে ক খ রেখার উপরে একটী লম্ব পাতিত কর। তাহা হইলেই ম ক প কোণ অর্দ্ধ সমকোণ হওয়াতে ক প ম কোণও অর্দ্ধ সমকোণ হইবে (ই উ ১।৩২) সুতরাং ক ম = প ম; (ইউ ১।৬)

এক্ষণে প ম^২ + ক ম^২ = ক প^২ কিম্বা ২ প ম^২ = ক প^২;

এক্ষণে এই দুই তুল্য পরিমাণকে যদ্যপি ২কপ^২ দিয়া ভাগ করা যায় তাহা হইলে

$\left(\frac{\text{পম}}{\text{কপ}}\right)^২ = \frac{১}{২}$ হইবে অথবা $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{১}{\sqrt{২}}$; তন্নিমিত্ত

শান ৪৫° = $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{১}{\sqrt{২}}$; কোশ ৪৫° = $\frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \frac{১}{\sqrt{২}}$;

টেন ৪৫° = $\frac{\text{পম}}{\text{কম}}$ = ১; কোট ৪৫° = $\frac{\text{কম}}{\text{পম}}$ = ১ ;

শিক ৪৫° = $\frac{\text{কপ}}{\text{কম}} = \sqrt{২}$; কোশিক ৪৫° = $\frac{\text{কপ}}{\text{পম}} = \sqrt{২}$;

ভারস ৪৫° = ১—কোশ ৪৫° = ১— $\frac{১}{\sqrt{২}}$ হইবে।

২প্র। ৬০° কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকল প্রকাশ কর।

ক প খ এক সমবাহু ত্রিভুজ হউক; * এবং তাহার প ক খ কোণ ৬০° পরিমিত মনে কর। ক খ রেখার উপরে প ম একটী লম্ব টান, তাহা হইলেই ক ম = ম খ হইবে (ইউ ১।২৬)। সুতরাং কম = $\frac{১}{২}$ কখ, = $\frac{১}{২}$ কপ

অতএব কোশ ৬০° = $\frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \frac{১}{২}$;

---

* চিত্র ৮দেখ।

শান ৬০° $\sqrt{}$ (১—কোশ^{২}৬০°) = $\sqrt{}$ (১—$\frac{১}{৪}$) = $\sqrt{(\frac{৩}{৪})}$

$= \frac{\sqrt{৩}}{২}$;

টেন ৬০° $= \frac{\text{শান ৬০°}}{\text{কোশ৬০°}} = \frac{\sqrt{৩}}{২} \div \frac{১}{২} = \sqrt{৩}$;

কোট ৬০° $= \frac{১}{\text{টেন ৬০°}} = \frac{১}{\sqrt{৩}}$;

শিক ৬০° $= \frac{১}{\frac{১}{২}} = ১ \times \frac{২}{১} = ২$;

কোশিক ৬০° $= \frac{১}{\text{শান ৬০°}} = ১ \div \frac{\sqrt{৩}}{২} = \frac{২}{\sqrt{৩}}$;

ভারস ৬০° = ১—কোশ ৬০° = $\frac{১}{২}$;

এবং এই ৬০° কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট ৩০° হওয়াতে,

শান ৩০° = কোশ ৬০° = $\frac{১}{২}$; কোশ ৩০° = শান ৬০ $= \frac{\sqrt{৩}}{২}$;

টেন ৩০° = কোট ৬০° $= \frac{১}{\sqrt{৩}}$; কোট ৩০° = টেন ৬০° $= \sqrt{৩}$;

শিক৩০° = কোশিক ৬০° $= \frac{২}{\sqrt{৩}}$; কোশিক৩০ = শিক ৬০° = ২ ;

ভারস ৩০° = ১–কোশ ৬০° = ১—$\frac{\sqrt{৩}}{২} = \frac{২-\sqrt{৩}}{২}$;

এস্থানে ইহা জ্ঞাত হওয়া আবশ্যক যে যদি কোন কোণ ৪৫° অপেক্ষা ন্যূন হয় তবে তাহার কোশাইনের পরিমাণ তাহার শাইনের পরিমাণ হইতে অধিক হইবে। এবং যদ্যপি ঐ কোণ ৪৫° হইতে অধিক হয় এবং ৯০° ন্যূন হয় তবে তাহার কোশাইন, শাইনের পরিমাণ হইতে কম হইবে (ইউ—১।১৯ প্র)।

এপর্য্যন্ত কোণ সম্বন্ধীয় যে সকল অনুপাতের বিষয় লেখা গিয়াছে, সে সকল কোণ প্রথম চতুরাংশ বৃত্তের কোণ বিবেচনা

করিতে হইবে, অর্থাৎ যাহাদের পরিমাণ ৯০° হইতে ন্যূন এমন কোণ সকলের বিষয়ই কথিত হইয়াছে। কিন্তু পূর্ব্ব সংজ্ঞাতে কোণের যে সকল অনুপাত প্রকাশিত আছে তাহা সকল প্রকার কোণের প্রতিই প্রয়োগ হইতে পারে, কোণ-পরিমাণ যত বড় হউক না কেন।

এই ক্ষেত্রে খখ১ ও গগ১ এই দুইটী রেখা পরস্পর লম্ব-ভাবে অঙ্কিত হইয়াছে, * আর কপ একটী ভ্রাম্যমান রেখা; এই রেখা প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুরাংশে স্থাপিত হইতেছে। পম, খখ১ রেখার উপর লম্বভাবে টানা হইয়াছে। এক্ষণে পূর্ব্ব সংজ্ঞাতে যেরূপ অনুপাত প্রকাশ আছে, সেইরূপ এই স্থানে সকল কোণেরই জানিতে হইবে। যথা—

$$\text{শান ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}}\text{; কোশ} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}}\text{; টেন ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কম}}\text{;}$$

ইত্যাদি আর আর সকল জানিবে।

এ স্থানে পম প্রথম ও দ্বিতীয় চতুরাংশেতে + ধন হয় কারণ উহা খখ১ রেখার এক দিকেই আছে, (যদ্যপি উপরের উক্ত দিককেই + দিক জ্ঞাত করা যায়) তাহা হইলে ঐ পম রেখা তৃতীয় ও চতুর্থ চতুরাংশে—ঋণ হইবে, কারণ খ খ১ রেখার ধন দিকের বিপরীত দিকে আছে। এবং এইরূপ কম, প্রথম ও চতুর্থ চতুরাংশে + ধন হয়, (ডানি দিকেতে যদি + ধন ধরা যায়) তাহা হইলে দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুরাংশে — ঋণ হইবে, কারণ ইহা গগ১ রেখার + ধন দিকের বিপরীত দিকে অঙ্কিত

* চিত্র ৯ দ্রষ্টব্য।

হইয়াছে; কম কে সকল প্রকারই + ধন করিতে হইবে, কারণ ইহা সকল প্রকারই ক বিন্দু হইতে ভ্রাম্যমান রেখার দিকে ক্রমাগত গতি হইয়াছে। অতএব প্রত্যেক চতুরাংশ বৃত্তেতে শান ক $= \frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ এই রূপে প্রকাশ হইতে পারে না, কিন্তু কোন কোন চতুরাংশেতে

$+\frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ কিম্বা $-\frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ যাহাকে $+\frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ কিম্বা $-\frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ রূপে লেখা যায় অর্থাৎ ধন কিম্বা ঋণ উভয়ই ঐ পম রেখার দিক পরিবর্ত্তনানুসারে হইতে পারে। এবং এইরূপ অন্য অন্য অনুপাত সকলও হইয়া থাকে।

চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে কোণের অনুপাত সকলের পরিবর্ত্তন দেখান যাইতেছে।

যথা (১) শান ক $= \frac{+\text{প ম}}{\text{ক প}}$ এইরূপ প্রথম ও দ্বিতীয় চতুরাংশেতে হইবে।

এবং $= \frac{-\text{প ম}}{\text{ক প}}$ এইরূপ তৃতীয় ও চতুর্থ চতুরাংশেতে হইবে।

আবার এই শান যেমন প্রথম ও দ্বিতীয় চতুরাংশেতে + ধন হয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থ চতুরাংশেতে — ঋণ হয় কোশিকও সেইরূপ জানিবে।

(২) কোশ ক $= \frac{+\text{ক ম}}{\text{ক প}}$ এইরূপ প্রথম ও চতুর্থ চতুরাংশেতে হয়, ও $= \frac{-\text{ক ম}}{\text{ক প}}$ এইরূপ ২য় ও ৩য় চতুরাংশেতে হয়;

অতএব কোশাইন যেমন প্রথম ও চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তে + ধন হয় এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্তেতে — ঋণ হয় এইমত শিকও জানিবে।

$$টেন\ ক = \frac{+ প ম}{+ ক ম}$$ প্রথম চতুরাংশবৃত্তে;

$$= \frac{+ প ম}{— ক ম}$$ দ্বিতীয় চতুরাংশবৃত্তে;

$$= \frac{— প ম}{— ক ম}$$ তৃতীয় চতুরাংশবৃত্তে;

$$= \frac{— প ম}{+ ক ম}$$ চতুর্থ চতুরাংশবৃত্তে;

অতএব টেঞ্জেণ্ট প্রথম ও তৃতীয় চতুরাংশবৃত্তেতে ধন হয়, কারণ ইহাতে প ম এক ক ম উভয়েরই একই চিহ্ন হয়। কিন্তু উহা দ্বিতীয় ও চতুর্থ চতুরাংশে ঋণ হইয়া থাকে।

চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকলের কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা প্রকাশ করা যাইতেছে।

ঐক্ষণে ভ্রাম্যমান ক প রেখা দুইবার খ খ' রেখার সহিত সংলগ্ন হয়, যখন খ খ' রেখার সহিত যুক্ত থাকিয়া ভ্রমণ করিতে আরম্ভ হয় তখন একবার, আর যখন ১৮০° ডিগ্রী ভ্রমণ শেষ হয় তখন একবার। ঐ সময়ে পম লম্ব সম্পূর্ণ রূপে বিলোপ প্রাপ্ত হয়; এবং ক ম ভূমি ক প পার্শ্বের সহিত পরিমাণ সমান হয়। আর ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকল প্রথম চতুরাংশ বৃত্তে কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা জানিলেই অন্য তিন চতুরাংশেতে উহাদের

কিরূপ হইবে তাহা জানা যাইতে পারে, কারণ উহারা প্রত্যেক চতুরাংশ বৃত্তেতে সমান রূপে পরিবর্ত্তন হইয়া থাকে। অর্থাৎ ক্রমশঃ একবার বৃদ্ধি ও একবার হ্রাস হইয়া থাকে।

এস্থানে ধন এবং ঋণ চিহ্ন বিষয়ে কোন বিবেচনা করা যাইবেক না।

এক্ষণে প্রথম চতুরাংশ বৃত্তে ক যেরূপ বদল হয় প্রথম ০° হইতে ৯০° পর্য্যন্ত; এবং তাহাতে কিরূপ অনুপাত সকলের পরিমাণ পরিবর্ত্তন হয় তাহা দেখান যাইতেছে। যথা—

শান ক $=\left(\frac{\text{প ম}}{\text{ক প}}\right)$ বদল হয় $\frac{০}{\text{ব}}$ হইতে $\frac{\text{ব}}{\text{ব}}$ পর্য্যন্ত;

কোশ ক $=\left(\frac{\text{ক ম}}{\text{ক প}}\right)$ বদল হয় $\frac{\text{ব}}{\text{ব}}$ হইতে $\frac{০}{\text{ব}}$ পর্য্যন্ত;

টেন ক $=\left(\frac{\text{প ম}}{\text{ক ম}}\right)$ বদল হয় $\frac{০}{\text{ব}}$ হইতে $\frac{\text{ব}}{০}$ পর্য্যন্ত;

কোট ক $=\left(\frac{\text{ক ম}}{\text{প ম}}\right)$ বদল হয় $\frac{\text{ব}}{০}$ হইতে $\frac{০}{\text{ব}}$ পর্য্যন্ত;

শিক ক $=\left(\frac{\text{ক প}}{\text{ক ম}}\right)$ বদল হয় $\frac{\text{ব}}{\text{ব}}$ হইতে $\frac{\text{ব}}{০}$ পর্য্যন্ত;

কোশিক ক $=\left(\frac{\text{ক প}}{\text{প ম}}\right)$ বদল হয় $\frac{\text{ব}}{০}$ হইতে $\frac{\text{ব}}{\text{ব}}$ পর্য্যন্ত;

অতএব চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে কোন এক কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকলের ঐ কোণের ব° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত ক্রমশঃ বদল হইলে যেরূপ চিহ্ন এবং পরিমাণ সকলের পরিবর্ত্তন হয় তাহা নিম্নলিখিত চিত্রের দ্বারা প্রকাশ করা যাইতেছে। যথা—

ক কোণ	শান ক	কোশ ক	টেন ক	কোট ক	শিক ক	কোশিক ক
0° হইতে ৯0° পর্য্যন্ত	0 হইতে ১ পর্য্যন্ত (+)	১ হইতে 0 পর্য্যন্ত (+)	0 হইতে ∞ (+)	∞ হইতে 0 +	১ হইতে ∞ (+)	∞ হইতে ১ (+)
৯0° হইতে ১৮0° পর্য্যন্ত	১ হইতে 0 পর্য্যন্ত (+)	0 হইতে ১ পর্য্যন্ত (—)	∞ হইতে 0 (—)	0 হইতে ∞ (—)	∞ হইতে ১ (−)	১ হইতে ∞ (+)
১৮0° হইতে ২৭0° পর্য্যন্ত	0 হইতে ১ পর্য্যন্ত (—)	১ হইতে 0 পর্য্যন্ত (—)	0 হইতে ∞ (+)	∞ হইতে 0 (+)	১ হইতে ∞ (—)	∞ হইতে ১ (—)
২৭0° হইতে ৩৬0° পর্য্যন্ত	১ হইতে 0 পর্য্যন্ত (—)	0 হইতে ১ পর্য্যন্ত (+)	∞ হইতে 0 (—)	0 হইতে ∞ (—)	∞ হইতে 0 (+)	১ হইতে ∞ (—)

উপরোক্ত তালিকাটী বালকগণের বিশেষরূপে স্মরণ রাখা অতি আবশ্যক, যাহাতে মুখাগ্রবর্ত্তী থাকে এমন করা উচিত।

এই তালিকা দৃষ্ট মাত্রেই জানা যাইবে যে শাইন এবং কোশাইনদিগের পরিমাণের সীমা ০ হইতে + ১, অতএব ইহারা +১ এবং—১ এর মধ্যে থাকিবে, অর্থাৎ এই সীমার মধ্যেই উহাদের হ্রাস বৃদ্ধি হয়; এবং শিকণ্ড ও কোশিকণ্ড এর সীমা + ১ এবং + ∞, ও—১ এবং—∞ এই পরিমাণের মধ্যে থাকিয়াই উহাদের হ্রাস বৃদ্ধি হয়। অতএব উহারা কখন + ১ এবং — ১ এর মধ্যবর্ত্তী হইতে পারেনা; এবং টেঞ্জেণ্ট ও কোটেঞ্জেণ্টের পরিমাণ ০ $\pm$ ∞ ইহারি মধ্যে উহাদের হ্রাস ও বৃদ্ধি হইয়া থাকে, অতএব ইহাদের পরিমাণ + ধন বা—ঋণ হইলে, যথেচ্ছ পরিমিত হইতে পারে।

আর ভারসেট শাইনের পরিমাণ চার চতুরাংশ বৃত্তেতেই নিম্ন-লিখিত সীমার মধ্যে থাকিয়া হ্রাস বৃদ্ধি হয় যথা— ১—১ অং ১—০, ১—০ অং ১—(—১), ১—(—১) অং ১—০ এবং ১—০ অং ১—১ কিম্বা ০ অং ১, ১ অং ২, ২ অং ১ এবং ১ অং ০; এই নিমিত্তই ভারশেট শাইন সর্ব্বদাই + ধন রাশি হইয়া থাকে। আর উহার পরিমাণ ফল রাশিও, প্রথম এবং দ্বিতীয় চতুরাংশের যতক্ষণ থাকে ততক্ষণ বৃদ্ধি হইতে থাকে ০ অং ২ পর্য্যন্ত, এবং তৎপরে ক্রমশঃ হ্রাস হইয়া ২ অং ০ পর্য্যন্ত হয়।

চতুর্থ অধ্যায়।

দুই সমকোণ হইতে যে কোন এক কোণ অন্তর করিলে যাহা অবশিষ্ট থাকে তাহাকে উহার সপ্লীমেণ্ট কোণ কহা যায়, এক্ষণে যদ্যপি এক কোণের ডিগ্রীসংখ্যা ক হয় তাহা হইলে ১৮০—ক, যে অন্তর ফল ডিগ্রীসংখ্যা হইবে, তাহাকে ক কোণের সপ্লীমেণ্ট কহা যায়। আবার ঐ অন্তর কোণের সপ্লীমেণ্ট ক কোণ হইবে। এক্ষণে ক্ষ যদ্যপি কোন কোণের বৃত্তিক পরিমাণ হয় তবে π—ক্ষ উহার সপ্লীমেণ্ট কোণের বৃত্তিক পরিমাণ হইবে।

কোন একটী কোণের, এবং উহার সপ্লীমেণ্টের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকলের পরস্পর যে সম্বন্ধ আছে তাহা প্রকাশ করা যাইতেছে।

প ক খ কোন এক কোণ হউক,* খককে বৃদ্ধি কর খ১ পর্য্যন্ত এবং প১ কম১ = প কখ কর। কপ১ = কপ কর এবং পম ও প১ম১ কে লম্ব করিয়া খ খ১ রেখার উপরে অঙ্কিত কর।

এক্ষণে ঐ কোণ প১কখ = ১৮০—প১ ক খ১ = ১৮০—প কখ, হইবে।

অতএব প১ কখ কোণ প কখ কোণের সপ্লীমেণ্ট হইল। আর ক্ষেত্রতত্ত্বের অনুসারে প কম এবং প১ কম১ এই ত্রিভুজ ক্ষেত্রদ্বয় সর্ব্ব সাধারণরূপে পরস্পর সমান হয়। এক্ষণে

$$\text{শান ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}},\ \text{শান}\,(১৮০—\text{ক}) = \frac{\text{প১ম১}}{\text{কপ১}};$$

* চিত্র ১০, দেখ।

কারণ পম ও প'ম' ইহারা পরিমাণে সমান, এবং ইহাদের বৈজিক চিহ্ন সকলও সমান, কারণ ইহারা খখ' রেখার এক পার্শ্বেই আছে। তন্নিমিত্ত শান ক = শান (১৮০—ক)

আর কোশ ক = $\frac{\text{কম}}{\text{কপ}}$, কোশ (১৮০—ক) = $\frac{\text{কম}'}{\text{কপ}'}$;

এস্থলে কম এবং কম' ইহারা পরিমাণে সমান বটে, কিন্তু ইহাদের বৈজিক চিহ্ন সকল পরস্পর বিপরীত, কারণ উহারা ক বিন্দুর বিপরীত দিকে অবস্থিত আছে। অতএব

কোশ ক = —কোশ (১৮০—ক)।

ক কোণের এই দুইটী অনুপাত ভিন্ন অন্য অন্য ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত সকল দুই প্রকারে তুলনা করা যাইতে পারে। ক্ষেত্র সকলের বাহু দ্বারা এক প্রকার, এবং পূর্ব্বোক্ত মত অনুপাত সকল দ্বারা অন্য আর একপ্রকার জানিবে।

এস্থলে নিম্নলিখিত অনুপাত সকল আমরা দ্বিতীয় প্রকার প্রকরণ দ্বারা প্রকাশ করিতেছি।

টেন (১৮০—ক) = $\frac{\text{শান (১৮০—ক)}}{\text{কোশ (১৮০—ক)}} = \frac{\text{শান ক}}{\text{-কোশ-ক}}$ = - টেন ক ;

কোট (১৮০—ক) = $\frac{\text{কোশ (১৮০—ক)}}{\text{শান (১৮০—ক)}} = \frac{\text{—কোশ ক}}{\text{শান ক}}$ = —কোট ক ;

শিক (১৮০—ক) = $\frac{১}{\text{কোশ (১৮০—ক)}} = \frac{১}{\text{—কোশ ক}}$ = —শিক ক;

কোশিক (১৮০—ক) = $\frac{১}{\text{শান (১৮০—ক)}} = \frac{১}{\text{শান ক}}$ = কোশিক ক ;

ভারস (১৮০—ক) = (১৮০—ক) ১—কোশ = ১ + কোশ ক ;

এই মত কোন এক কোণের শাইন এবং কোশিকও উহাদের সপ্লীমেণ্ট কোণের শাইন এবং কোশিকণ্ডের সহিত

পরস্পর সমান হইয়া থাকে। আর কেবল ভার্‌সেট শাইন ভিন্ন, ঐ কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় আর আর অনুপাত সকল উহার সপ্লীমেণ্ট কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় অনু- পাতের সহিত একে একে অঙ্ক পরিমাণ পরস্পর সমান হয়; কিন্তু তাহাদের বৈজিক চিহ্ন বিপরীত হয়।

শান (—ক) = —শান ক এবং কোশ (—ক) = কোশ ক, ইহাদের প্রত্যক্ষ প্রমাণ নিম্নে দৃষ্টি কর।

প ক খ কোন এক কোণ হউক,* পম কে লম্বভাবে খক খ১ রেখার উপরে অঙ্কিত কর, এবং ঐ লম্বকে প১ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর যেন মপ ও মপ১ পরস্পর সমান হয়, এবং কপ১ যোগ কর। তাহা হইলে প১ কখ ও পকখ ইহারা পরস্পর কখ রেখার বিপরীত দিকে অঙ্কিত হওয়াতে উহাদের চিহ্ন বিপরীত হয় কিন্তু উহাদের পরিমাণ মাপে পরস্পর সমান, এবং যদ্যপি পকখকে ক দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহা হইলে প১কখ—ক হইবে। এবং

$$\text{শান ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}},\quad \text{শান (—ক)} = \frac{\text{প১ম}}{\text{কপ}};$$

এবং প১ম অঙ্ক পরিমাণে পম এর সহিত সমান কিন্তু উহা- দের চিহ্ন বিপরীত হয় কারণ উহারা খখ১ রেখার বিপরীত দিকে পরস্পর আছে অতএব শান (—ক) = —শান ক;

$$\text{আর কোশ (—ক)} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ১}} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \text{কোশ ক।}$$

আর আর সকল অনুপাত ও এইমত হইবে।

---

* চিত্র ১১ দেখ।

$$\text{টেন}\,(—\text{ক}) = \frac{\text{শান}\,(—\text{ক})}{\text{কোশ}\,(—\text{ক})} = \frac{—\text{শান ক}}{\text{কোশ ক}} = —\text{টেন ক}।$$

$$\text{কোট}\,(—\text{ক}) = \frac{\text{কোশ}\,(—\text{ক})}{\text{শান}\,(—\text{ক})} = \frac{\text{কোশ ক}}{—\text{শান ক}} = —\text{কোট ক}।$$

$$\text{শিক}\,(—\text{ক}) = \frac{১}{\text{কোশ}\,(—\text{ক})} = \frac{১}{\text{কোশ ক}} = \text{শিক ক}।$$

$$\text{কোশিক}\,(—\text{ক}) = \frac{১}{\text{শান}\,(—\text{ক})} = \frac{১}{—\text{শান ক}} = —\text{কোশিক ক}।$$

ভারস (—ক) = ১—কোশ (—ক) = ১—কোশ ক = ভারস ক। শান (১৮০+ক) = —শান ক এবং কোশ (১৮০+ক) = —কোশ ক। এই বিষয়ের সপ্রমাণ নিম্নে দৃষ্টি কর।

পকখ একটী কোণ হউক*। পক রেখাকে প১ পর্য্যন্ত এরূপ বৃদ্ধি কর যেন কপ১ রেখা কপ এর সহিত সমান হয়। এবং কখ রেখাকে খ১ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। পরে পম এবং প১ ম১ দিগকে খকখ১ রেখার উপরে দুইটী লম্বভাবে টান। এক্ষণে খকপ কোণকে যদ্যপি ক ধরা যায়, খকপ১ কোণ যাহা খকপ কোণের দিক হইতে মাপ করা যাইতে পারে, উহা ১৮০ সমান + ক হইবে পকম ও প১ কম১ এই দুই ত্রিভুজ ক্ষেত্রতত্ত্বের নিয়মানুসারে সর্ব্বতোভাবে সমান হইবে।

$$\text{এবং শান ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}},\ \text{শান}\,(১৮০+\text{ক}) = \frac{\text{প১ ম১}}{\text{কপ১}};$$

$$\text{কোশ ক} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}},\ \text{কোশ}\,(১৮০+\text{ক}) = \frac{\text{কম১}}{\text{কপ১}};$$

এক্ষণে পম ও প১ ম১ ইহাদের অঙ্ক পরিমাণ পরস্পর সমান কিন্তু উহাদের চিহ্ন বিপরীত হয়। আর কম ও কম১ ইহারাও

---

* চিত্র ১২ দেখ।

পরিমাণে সমান কিন্তু চিহ্ন পূর্ব্বমত বিপরীত হয়। এইরূপ—

শান (১৮০ + ক) = — শান ক;

কোশ (১৮০ + ক) = — কোশ ক;

আর টেন (১৮০+ক) $= \frac{\text{শান (১৮০+ক)}}{\text{কোশ (১৮০+ক)}} = \frac{\text{—শান ক}}{\text{—কোশ ক}} =$ টেন ক;

কোট (১৮০+ক) $= \frac{\text{কোশ (১৮০+ক)}}{\text{শান (১৮০+ক)}} = \frac{\text{—কোশ ক}}{\text{—শান ক}} =$ কোট ক;

এইরূপ শিক (১৮০+ক) = — শিক ক;

এবং কোশিক (১৮০+ক) = — কোশিক ক;

উপরি উক্ত দুই প্রধান সূত্রদিগকে (শাইন ও কোশাইন) অন্য আর একপ্রকারে প্রকাশ করা যাইতে পারে, কিন্তু এই দুই প্রকারেরই প্রকাশিত ফল একই হইয়া থাকে, যথা—

শান ক = —শান (ক—১৮০);

কোশ ক = —কোশ (ক—১৮০)।

এক্ষণে জানান যাইতেছে যে, এই ক কোণের পরিমাণ যত ইচ্ছা তত হউক না কেন; এবং তাহার চিহ্ন ধন + বা ঋণ—হউক না কেন; পূর্ব্বোক্ত সংজ্ঞাতে ক কোণের পরিমাণ বিষয়ে যাহা কথিত হইয়াছে তাহার সত্যতা বিষয়ে সন্দেহ মাত্র নাই।

শান (৯০°+ ক) = কোশ ক এবং কোশ (৯০°+ক) = —শান ক, সপ্রমাণ নিম্নে দৃষ্টি কর।

পকখ কোন এক কোণ হউক,* কপ১, কপ এর লম্বভাবে থাকুক। আর কপ১ কে কপ এর সমান কর, এবং পম ও প১ ম১ দিগকে খকখ১ রেখার উপরে লম্ব টান। এক্ষণে পকখ

* চিত্র ১৩ দেখ।

কোণকে যদ্যপি ক ধরা যায় তাহা হইলে প১কখ কোণ ৯০°+ক হইবে। সুতরাং পকম কোণ কপ১ম১ কোণের সহিত ক্ষেত্র-তত্ত্বের নিয়মানুসারে সমান হইবে। এবং পকম ত্রিভুজ ক্ষেত্রও প১কম১ ত্রিভুজক্ষেত্রের সহিত (ক্ষেত্রতত্ত্বের নিয়মানু-সারে) সমান হইবে, এবং

$$\text{শান}\ (৯০^\circ+\text{ক}) = \frac{\text{প}^{১}\text{ম}^{১}}{\text{কপ}^{১}}\ ;\ \text{কোশ ক} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}}\ ;$$

এক্ষণে প১ম১ অঙ্ক-পরিমাণ, কম এর সহিত সমান হইল। এবং উভয়েরই বৈজিক চিহ্ন সমান রহিল। অতএব শান (৯০°+ক) = কোশ ক;

$$\text{আবার কোশ}\ (৯০^\circ+\text{ক}) = \frac{\text{কম}^{১}}{\text{কপ}^{১}},\ \text{শান ক} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}}\ ;$$

এক্ষণে কম১ এবং পম ইহারা অঙ্ক-পরিমাণে পরস্পর সমান; কিন্তু উহাদের বৈজিক চিহ্ন বিপরীত হয়।

অতএব কোশ (৯০°+ক) = — শান ক।

উপরোক্ত প্রতিজ্ঞাটীর সত্যতা সপ্রমাণ করিতে হইলে, উহার সম্বন্ধীয় আর যে কয়েক বিষয় ঘটিতে পারে, সেই সকল গুলির পরীক্ষা করা আবশ্যক। উপরোক্ত সংখ্যাতে যে ক্ষেত্রটী অঙ্কিত আছে তাহাতে ইহা প্রমাণ হইতে পারে যে, ক কোণ + ধন কোণ ও ইহা প্রথম চতুরাংশের অন্তর্গত কোণ, এবং ঐ প্রথম চতুরাংশেতেই তাহার শেষ হইয়াছে। নিম্ন তিন ক্ষেত্রেতে কপকে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুরাংশতে কিরূপ স্থাপিত হয় তাহা প্রমাণ হইবে*।

এই পূর্ব্বোক্ত সংজ্ঞাতে যে চার ক্ষেত্র অঙ্কিত আছে

* চিত্র ১৪ দেখ।

তদ্দারা—ঋণ কোণ হইলেও এই প্রতিজ্ঞাটীর ফল সত্য প্রমাণ করা যাইতে পারে। যথা—

ক কোণ যখন ০° হইতে—৯০° এর মধ্য থাকে তখন চতুর্থ ক্ষেত্রে ইহার প্রমাণ পাওয়া যাইবে; এবং ক কোণ যখন—৯০° হইতে—১৮০° এর মধ্যে থাকে তখন তৃতীয় ক্ষেত্রে ইহার প্রমাণ দৃষ্ট হইবে। আর ক কোণ যখন—১৮০° হইতে—২৭০° এর মধ্যে থাকিল তখন দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তাহার প্রমাণ পাওয়া যাইবে। এবং ক কোণ যখন—২৭০° হইতে—৩৬০° এর মধ্যে থাকিবেক তখন ইহার প্রমাণ প্রথম ক্ষেত্রে দৃষ্ট করিবে*।

ক যদ্যপি কোন এক কোণের ডিগ্রী সংখ্যা হয় তবে ৯০°—ক যে ডিগ্রীসংখ্যা হইবে তাহাকে ঐ ক কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট কোণ কহা যায়। এইরূপ ক্ষ যদ্যপি কোন এক কোণের বৃত্তিক পরিমাণ হয় তবে $\frac{\pi}{২}$—ক্ষ সেই কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের বৃত্তিক পরিমাণ হইবে। কোন এক কোণের কম্‌প্লীমেণ্ট কোণ বিষয় একবার উল্লেখ করা গিয়াছে কিন্তু তৎকালীন সেই কোণকে ধন কোণ, ও এক সমকোণ হইতে ন্যূন, ধরা গিয়াছে, এক্ষণে সেরূপ আর বিবেচনা করা যাইবে না, এক্ষণে সাধারণতঃ দেখান যাইবে যে কোন এক কোণের (সেই কোণের পরিমাণ যত ইচ্ছা তত হউক না কেন) শাইন তাহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের কোশাইনের সহিত সমান হইবে, এবং ঐ কোণের কোশাইন তাহার কম্‌প্লীমেণ্ট কোণের শাইনের সহিত সমান হইবে। এই দুইটী প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিতে হইলে, পূর্ব্বোক্ত সংজ্ঞা এবং এই সংজ্ঞা যত

* চিত্র ১৫ দেখ।

কোণে যে সকল অবস্থা লিখিত হইয়া তদ্বিষয় বিশেষ রূপে বিচার করা এবং তদ্দ্বারা যে ফল লব্ধ হয় তাহার বিষয় বিশেষ অনুধাবন করা আবশ্যক, ইহা দ্বারাই তাহার সপ্রমাণ হইতে পারে। যথা—

আমরা পূর্ব্বে সপ্রমাণ করিয়াছি যে—

শান (৯০°+ক) = কোশ ক,

আর শান (৯০°+ক) = শান {১৮০°—(৯০°+ক)}

= শান (১৮০°—৯০°—ক)

= শান (৯০°—ক)

অতএব শান (৯০°—ক) = কোশ ক এই সাধারণতঃ;

আবার যদ্যপি আমরা মনে করি যে ৯০°—ক = ক ১;

তাহা হইলে ক = ৯০°—ক ১;

অতএব শান ক ১ = শান (৯০°—ক),

কিন্তু শান (৯০°—ক) = কোশ ক

= কোশ (৯০°—ক ১)

অতএব শান ক ১ = কোশ (৯০—ক১) সামান্যতঃ।

এইরূপ উক্ত দুই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ হইল।

প্রতিজ্ঞা। কোন এক কোণের পরিবর্ত্তন হইলে তাহার শাইন কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা দেখান যাইতেছে।

খ ক খ১ ও গ ক গ১ এই দুইটী* রেখা ক বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে দণ্ডায়মান হউক। এবং ক খ রেখার সমান প ক রেখাকে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর। যথা খ গ

* চিত্র ১৬ দেখ।

খ^{১} গ^{১}, এবং প বিন্দু হইতে পম, খকখ^{১} রেখার উপরে লম্ব টান। তাহা হইলে

$$\text{শান প ক খ} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}};$$

যখন কপ রেখা কখ এর সহিত সংলগ্ন হয়, তখন পম লম্ব লুপ্ত থাকে। অর্থাৎ যখন কোণ শূন্য হয় তখন উহার শাইনও শূন্য হয়। আর যখন ঐ কপ প্রথম চতুরাংশের ভিতরে ভ্রমণ করে, তখন পম ক্রমশঃ বৃদ্ধি হইতে থাকে, যেপর্য্যন্ত কপ রেখা কগ এর সহিত সংলগ্ন না হয়, এবং উহার চিহ্নও ধনাত্মক হয়। তখন পম লম্ব কপ এর সহিত সমান হয়। ইহাতে যেমন কোণের বৃদ্ধি হয় 0° হইতে ৯0° পর্য্যন্ত, তদনুসারে উহার শাইনের পরিমাণও 0 হইতে ১ পর্য্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি হয়। আর যখন দ্বিতীয় চতুরাংশ-বৃত্তে পরিভ্রমণ করে তখন পম ধন রাশি হয় এবং ক্রমশঃ হ্রাস হইতে থাকে যেপর্য্যন্ত কপ রেখা কখ^{১} এর সহিত সংলগ্ন না হয়। তখনও ঐ পম লম্ব লুপ্ত হইয়া যায়। অতএব কোণ যেমন ৯0° হইতে ১৮0° পর্য্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি হয় বটে কিন্তু ইহার শাইনের পরিমাণ তদনুরূপ ক্রমশঃ ১ হইতে ০ লঘু হয়। আবার যখন কপ তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্তে পরিভ্রমণ করে, তখন পম ঋণ রাশি হয়, এবং অঙ্ক-পরিমাণ ক্রমশঃ বৃদ্ধি হইতে থাকে যেপর্য্যন্ত কগ^{১} এর সহিত না সংলগ্ন হয়। অতএব কোণ যেমন ১৮0° হইতে ২৭0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়; উহার শাইনও ঋণাত্মক রাশি হইয়া অঙ্ক-পরিমাণ ক্রমশঃ 0 হইতে—১ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়। আর যখন কপ চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তে পরিভ্রমণ করে তখনও পম

রাশি ঋণাত্মক হয়, এবং অঙ্ক-পরিমাণ ক্রমশঃ হ্রাস হইতে থাকে, যেপর্য্যন্ত না কপ কখ এর সহিত পুনর্ব্বার সংলগ্ন হয়। অতএব কোণ যখন বৃদ্ধি হয় ২৭০° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত কিন্তু উহার শাইন ঋণাত্মক রাশি হইয়া অঙ্ক-পরিমাণ ক্রমশঃ —১ হইতে ০ পর্য্যন্ত হ্রাস হইয়া থাকে।

প্রতিজ্ঞা।—কোন এক কোণের পরিবর্ত্তন হইলে তাহার কোশাইনের কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা দেখান যাইতেছে পূর্ব্বোক্ত ক্ষেত্র দ্বারা—

$$\text{কোশ পকখ} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}}$$

প্রথমতঃ কপ যখন কখ এর সহিত সংলগ্ন হয় কম = কপ হয়। অতএব কোণ যখন শূণ্য হয় তাহার কোশাইনের পরিমাণ ১ হয়, যখন কপ প্রথম চতুরাংশ বৃত্তের ভিতরে ভ্রমণ করে তখন কম ধনরাশি হয় এবং ক্রমশঃ হ্রাস হইতে থাকে, যতক্ষণ পর্য্যন্ত কপ, কগ এর সহিত সংলগ্ন না হয়, এবং তখন কম লম্ব লুপ্ত হয়। অতএব যেমন কোণ ০° হইতে ৯০° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, উহার কোশাইনও তদনুরূপ ক্রমশঃ হ্রাস হয় ১ হইতে ০ পর্য্যন্ত। যখন কপ দ্বিতীয় চতুরাংশ বৃত্তে ভ্রমণ করে তখন কম ঋণাত্মক রাশি হয় এবং ক্রমে অঙ্ক-পরিমাণ বৃদ্ধি হইতে থাকে, যতক্ষণ পর্য্যন্ত কপ, কখ' এর সহিত সংলগ্ন না হয়। অতএব যেমন কোণ বৃদ্ধি হইতে থাকে ৯০° হইতে ১৮০° পর্য্যন্ত, উহার কোশাইন ও ঋণাত্মক রাশি হয় ক্রমশঃ অঙ্ক পরিমাণে ০ হইতে —১ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়। আবার যখন কপ তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্তে পরিভ্রমণ করে তখনও কম ঋণাত্মক রাশি হইয়া ক্রমশঃ অঙ্ক-পরিমাণে

হ্রাস হইতে থাকে যে পর্য্যন্ত কপ, কগ' এর সহিত সংলগ্ন না হয়। অতএব কোণ যেরূপ ক্রমশঃ বৃদ্ধি হয় ১৮০° হইতে ২৭০° পর্য্যন্ত, উহার কোশাইন ও ঋণরাশি হইয়া ক্রমশঃ তদনুযায়ী হ্রাস হইতে থাকে —১ হইতে ০ পর্য্যন্ত আর যখন কপ চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তে পরিভ্রমণ করে তখনও কম ধনাত্মক রাশি হয় বটে কিন্তু অঙ্ক-পরিমাণে ক্রমশঃ বৃদ্ধি হইতে থাকে, যে পর্য্যন্ত কপ কখ এর সহিত সংলগ্ন না হয়; অতএব কোণ যেমন ক্রমশঃ বৃদ্ধি হয় ২৭০° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত উহার কোশাইন + ধনাত্মক রাশি হইয়া ক্রমশঃ অঙ্ক-পরিমাণে ০ হইতে ১ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়।

প্রতিজ্ঞা। কোন এক কোণ পরিবর্ত্ত হইলে তাহার টেঞ্জেণ্ট কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা দেখান যাইতেছে। পূর্ব্বোক্ত ক্ষেত্র দ্বারা—

$$\text{টেন পকখ} = \frac{\text{পম}}{\text{কম}};$$

প্রথমতঃ কপ যখন কখ এর সহিত সংলগ্ন হয়, তখন পম লুপ্ত থাকে, এবং কম = কখ; অতএব যখন কোণ শূন্য হয় তখন তাহার টেঞ্জেণ্টও শূন্য হয়। যখন ঐ কপ প্রথম চতুরাংশ বৃত্তেতে পরিভ্রমণ করে, তখন পম এবং কম ধনাত্মক রাশি-হয়। ও পম ক্রমশঃ বৃদ্ধি হইতে থাকে, এবং কম ক্রমশঃ হ্রাস হইতে থাকে, যে পর্য্যন্ত কপ কগর সহিত সংলগ্ন না হয়। অতএব কোণ যখন বৃদ্ধি হয় ০ হইতে ৯০° পর্য্যন্ত উহার টেঞ্জেণ্ট ০ হইতে ক্রমশঃ বৃদ্ধি হইতে থাকে অসীম পরিমাণ। অর্থাৎ কোন এক কোণ যদ্যপি ৯০° এর অতি আসন্ন পরিমাণ ধরা যায় তবে তাহার টেঞ্জেণ্টকে যত ইচ্ছা তত পরি-

মাণে বাড়ান যাইতে পারে। এই প্রকার পরিমাণ সংক্ষেপে প্রকাশ করিতে হইলে, ৯0° টেঞ্জেণ্ট অনন্ত রূপ হয়, ইহার বৈজিক চিহ্ন এই যথা টেন ৯0° = ∞ , ∞ , এই চিহ্নকে অনন্ত জ্ঞাপক কহে। যখন ক প দ্বিতীয় চতুরাংশের মধ্যে পরিভ্রমণ করে, তখন প ম ধনাত্মক রাশি হয়, এবং কম ঋণাত্মক হয়। পম ক্রমশঃ হ্রাস হইতে থাকে এবং কম ক্রমশঃ অঙ্ক-পরিমাণ বৃদ্ধি হইতে থাকে, ক প যে পর্য্যন্ত ক খ১ এর সহিত সংলগ্ন না হয়। অতএব কোণ যেমন ৯0 হইতে ১৮0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, উহার টেঞ্জেণ্টও ঋণাত্মক রাশি হইয়া অঙ্ক-পরিমাণে ক্রমশঃ হ্রাস হইয়া অসীম সীমা হইতে 0 শূন্য পর্য্যন্ত হয়। আবার যখন কপ তৃতীয় চতুরাংশ বৃত্তে ভ্রমণ করে তখন পম এবং কম ঋণাত্মক রাশি হয়, পম অঙ্ক-পরিমাণে বৃদ্ধি হয়, এবং কম অঙ্ক-পরিমাণে হ্রাস হয়, যে পর্য্যন্ত গ কপ কগ১ এর সহিত সংলগ্ন হয়। অতএব কোণ যেমন ১৮0° হইতে ২৭0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয় উহার টেঞ্জেণ্ট ধনাত্মক রাশি হয় এবং 0 হইতে ক্রমশঃ অসীম সীমা পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, অর্থাৎ কোন এক কোণ যদ্যপি ২৭0° এর অতি আসন্ন পরিমাণ ধরা যায়; তবে উহার টেঞ্জেণ্টকে যত ইচ্ছা তত বৃদ্ধি করা যায়, ইহাকে উপরোক্ত রূপে সংক্ষেপে এই প্রকারে লেখা যায়। টেঞ্জেণ্ট ২৭0° অসীম রাশি, তাহার বৈজিক চিহ্ন ২৭0 = ∞ ; যখন কপ চতুর্থ চতুরাংশ বৃত্তে পরিভ্রমণ করে, তখন পম ঋণাত্মক রাশি হয়, এবং কম ধনরাশি হয়; পম ক্রমশঃ অঙ্ক-পরিমাণে হ্রাস হয় এবং কম ক্রমে বৃদ্ধি হইতে থাকে, কপ যে পর্য্যন্ত কখ এর সহিত না

সংলগ্ন হয়, অতএব কোণ যখন বৃদ্ধি হয় ২৭০° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত এবং উহার টেঞ্জেণ্ট ঋণাত্মক হইয়া ক্রমে অসীম রাশি হইতে শূন্য পর্য্যন্ত হ্রাস হইবে। এইরূপ কোটেঞ্জেণ্টেরও পরিবর্ত্তন দেখান যাইতে পারে।

প্রতিজ্ঞা। কোন এক কোণের পরিবর্ত্তন হইলে তাহার শিকণ্ড কিরূপ পরিবর্ত্তন হয় তাহা দেখান যাইতেছে।

পূর্ব্বে যেরূপ শাইন কোশাইন এবং টেঞ্জেণ্টের পরিবর্ত্তন ক্ষেত্রপাত দ্বারা সপ্রমাণ করা গিয়াছে, সেইরূপ শিকণ্ডের পরিবর্ত্তনও ক্ষেত্রপাত দ্বারা দেখান যাইতে পারে। কিম্বা আরও এই সূত্র অবলম্বন দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা শিক প ক খ = $\frac{১}{\text{কোশ পকখ}}$; এবং এস্থানে কোশাইনের চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে পরিবর্ত্তন দেখান গিয়াছে তদ্দ্বারা শিকণ্ডের চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে যে কিরূপ পরিবর্ত্তন হইতে পারে তাহা ক্ষেত্রে দেখান যাইতেছে। যেমন কোণ 0° হইতে ৯0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, তাহার কোশাইনের পরিমাণ ১ হইতে 0 পর্য্যন্ত ক্রমশঃ হ্রাস হয়। অতএব উহার শিকণ্ড বৃদ্ধি হয় ১ হইতে অসীম রাশি পর্য্যন্ত, এজন্য ৯0° এর শিকণ্ড অসীম রাশি কহা যাইতে পারে। যখন কোণ ৯0° হইতে ১৮0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, তখন তাহার কোশাইন ঋণাত্মক রাশি হইয়া 0 হইতে —১ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, সুতরাং উহার শিকণ্ড ঋণাত্মক হয় এবং অঙ্ক-পরিমাণ অসীম দীর্ঘ হইতে ক্রমে হ্রাস হইয়া এক পর্য্যন্ত হয়। আবার যেমন ১৮0° হইতে ২৭0° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, তাহার কোশাইন ঋণাত্মক হইয়া, অঙ্ক-পরিমাণ ক্রমে —১ হইতে 0 শূন্য পর্য্যন্ত হ্রাস হয়।

অতএব শিকণ্ডও ঋণরাশি হয়, অঙ্কপরিমাণ —১ হইতে অসীম রাশি পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়। আবার ঐ কোণ ২৭০° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হইলে, তাহার কোশাইন ধনরাশি হয়, এবং ক্রমশঃ বৃদ্ধি হয়, ০ হইতে ১ পর্য্যন্ত; অতএব শিকণ্ডও ধনরাশি হয় এবং ক্রমশঃ অসীম দীর্ঘ রাশি হইতে ১ পর্য্যন্ত হ্রাস হয়।

এইরূপ কোশিকণ্ডের পরিবর্ত্তনও দেখান যাইতে পারে। যথা—কোশিক ক = $\frac{১}{\text{শান ক}}$; অতএব শাইনের পরিবর্ত্তন চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে যেরূপ দেখান গিয়াছে, তদ্দ্বারা কোশিকণ্ডের পরিবর্ত্তন চারি চতুরাংশ বৃত্তেতে দেখান যাইতে পারে।

ভারস ক =১—কোশ ক সেই জন্য যেমন কোণ ০° হইতে ১৮০° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয়, তাহার ভারসেট শাইনও তদনুসারে ০ হইতে ২ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয় এবং কোণ যেমন ১৮০° হইতে ৩৬০° পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হয় তাহার ভারসেট শাইন ক্রমশঃ ২ হইতে ০ পর্য্যন্ত হ্রাস হয়।

উপরোক্ত সকল দৃষ্টি করিলে এই প্রমাণ হয় যে, শাইন ও কোশাইনদিগের ফল—১ ও + ১ এর মধ্যে হইতে পারে টেঞ্জেণ্ট ও কোটেঞ্জেণ্টদিগের ফলরাশি—∞ ও + ∞ এর মধ্যে হইতে পারে। শিকণ্ড ও কোশিকণ্ডের ফল রাশি—∞ ও,—১ এবং + ১ + ∞ এর মধ্যে হইতে পারে ভারসেট শাইন সর্ব্বদাই ধনরাশি হয় ও উহার ফল ০ ও ২ এর মধ্যে হয়।

কোণের ডিগ্রী পরিমাণ।

অনুপাতের (রশীয়র) নাম	0°	৩০°	৪৫°	৬০°	৯০°	১২০°	১৩৫°	১৫০°	১৮০°	
শাইন	0	$\frac{১}{২}$	$\frac{১}{\sqrt{২}}$	$\frac{\sqrt{৩}}{২}$	১	$\frac{\sqrt{৩}}{২}$	$\frac{১}{\sqrt{২}}$	$\frac{১}{২}$	0	
কোশাইন	১	$\frac{\sqrt{৩}}{২}$	$\frac{১}{\sqrt{২}}$	$\frac{১}{২}$	0	$-\frac{১}{২}$	$-\frac{১}{\sqrt{২}}$	$-\frac{\sqrt{৩}}{২}$	-১	
টেঞ্জেণ্ট	0	$\frac{১}{\sqrt{৩}}$	১	$\sqrt{৩}$	∞	$-\sqrt{৩}$	-১	$-\frac{১}{\sqrt{৩}}$	0	
কোটেঞ্জেণ্ট	∞	$\sqrt{৩}$	১	$\frac{১}{\sqrt{৩}}$	0	$-\frac{১}{\sqrt{৩}}$	-১	$-\sqrt{৩}$	∞	
শিকণ্ড	১	$\frac{২}{\sqrt{৩}}$	$\sqrt{২}$	২	∞	-২	$-\sqrt{২}$	$-\frac{২}{\sqrt{৩}}$	১	
কোশিকণ্ড	∞	২	$\sqrt{২}$	$\frac{২}{\sqrt{৩}}$	১	$\frac{২}{\sqrt{৩}}$	$\sqrt{২}$	২	∞	
ভার্সেট শাইন	0	$১-\frac{\sqrt{৩}}{২}$	$১-\frac{১}{\sqrt{২}}$	$\frac{১}{২}$	১	$১-\frac{১}{২}$	$১+\frac{১}{\sqrt{২}}$	$১+\frac{\sqrt{৩}}{২}$	২	

প্রতিজ্ঞা। যে সকল কোণের ত্রিকোণমৈতিক অনুপাত "ক" কোণের ত্রিকোণমৈতিক অনুপাতের সহিত সমান হয়, সেই কোণ সকল প্রকাশ করিবার জন্য সাধারণ সূত্র লিখিতেছি যে, শাইন ক = + শাইন (১৮০°—ক) এবং কোশিক. ক = + কোশিক. (১৮০°—ক), যদ্যপি ন কোণ সংখ্যা হয়। তাহা হইলে ন ৩৬০° + ক কিম্বা ন ৩৬০° + (১৮০°—ক) ইহার মধ্যে যে সমস্ত কোণভুক্ত হইতে পারে সে সমস্ত কোণের শাইন এবং কোশিকও ক কোণের শাইনও কোশিকণ্ডের সহিত সমান হইবে। এস্থানে ন ৩৬০° ৩৬০° এর কোন গুণরাশি প্রকাশ করে ও ন কোন অখণ্ড রাশি বুঝায় উহা ধন বা ঋণ রাশি হউক বা শূন্যই হউক ও ক ধন বা ঋণ হইলেও ইহার শাইন ও কোশিকও উপরোক্ত সূত্র অনুসারে সমান হইবে। এক্ষণে উক্ত দুই সূত্র এইরূপে লেখা যাইতে পারে যথা—

২ ন ১৮০° + ক এবং (২ ন + ১) ১৮০°—ক

এস্থানে বৈজিগণিত চিহ্ন + কিম্বা — হইবে ১৮০° গুণ রাশি যুগ্ম ও দৃঢ় হইবে। আর এক্ষণে উক্ত দুই সূত্রকে সামান্যতঃ এক সূত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা—

ন ১৮০° + (—১)^{ন} ক; কারণ (—১)^{ন} = + ১ কিম্বা —১, হইবে অর্থাৎ নএর সংখ্যা যুগ্ম হইলে ধন, এবং দৃঢ় হইলে ঋণ হইবে।

অতএব শান. ক = শান. { ন. ১৮০° + (—১)^{ন} ক; },

কোশিক. ক = কোশিক. { ন. ১৮০° + (—১)^{ন} ক };

(২) কোশ. ক = + কোশ. (—ক) এবং শিক. ক = + শিক. (—ক);

অতএব সেই সমস্ত কোণের কোশাইন এবং শিকও, ক কোণের শাইন এবং কোশিকণ্ডের সহিত সমান, সেই সমস্ত কোণ এই দুই সূত্রের অন্তর্গত।

ন ৩৬০° + ক কিম্বা ন ৩৬০° — ক ;

এক্ষণে এই দুই সূত্রের যে কোন এক সূত্রে যে সমস্ত কোণ প্রকাশিত আছে, যথা—২ ন ১৮০° + ক এস্থানে ১৮০° গুণ রাশি সর্ব্বদা যুগ্মরাশি হইবে। অতএব কোশাইন ক = কোশাইন (ন ৩৬০° + ক) ও শিক. ক = শিক. (ন ৩৬০° + ক)।

টেন. ক = + টেন. (১৮০° + ক) এবং কোট. ক = + কোট. (১৮০° + ক) অতএব সেই সমস্ত কোণের সমান টেঞ্জেণ্ট ও কোট. ক কোণের সহিত সমান হইবে। যে সকল কোণের টেন. ও কোট. এই দুএর চিরভুক্ত হইবে অর্থাৎ ন. ৩৬০° + ক কিম্বা ন ৩৬০° + ১৮০° + ক যাহাদিগকে এইরূপ লেখা যাইতে পারে ২ ন ১৮০° + ক কিম্বা (২ ন + ১) ১৮০° + ক কিম্বা এক সাধারণ সূত্রে লিখা যায়, যথা—ন ১৮০° + ক এস্থানে ন যুগ্ম বা অযুগ্ম রাশি হইতে পারে ও উহার বৈজিগণিত চিহ্ন সর্ব্বদা ধন হয়। অতএব টেন। ক = টেন. (ন ১৮০° + ক); কোট. ক = কোট. (ন ১৮০° + ক) বৃত্তিক পরিমাণের জন্য উপরোক্ত ফল্ সকল এইরূপে প্রকাশিত হইল।

$$\text{শাইন ক্ষ} = \text{শাইন}\left\{\text{ন}\pi + (-১)^{\text{ন}}\text{ক্ষ}\right\};$$

$$\text{কোশিক. ক্ষ} = \text{কোশিক.} \left\{ \text{ন}\pi + (-১)^{\text{ন}}\text{ক্ষ} \right\}$$

কোশ. ক্ষ = কোশ. (২ ন π $\pm$ ক্ষ) ; শিক. ক্ষ = শিক. (২ ন π $\pm$ ক্ষ) টেন. ক্ষ = টেন. (ন π + ক্ষ); কোট. ক্ষ = কোট. (ন π + ক্ষ)

উদাহরণ।

যেহেতু শান ৩০° = শান $\frac{১}{৬}\pi = \frac{১}{২}$; অতএব যে সকল কোণের শাইন $\frac{১}{২}$ হয়, সে সকল কোণের সামান্যতঃ পরিমাণ-ফল এইরূপ প্রকাশিত হয়; যথা—ন $\pi + (-১)^{\text{ন}} \frac{১}{৬}\pi = \left\{৬\text{ন} + (-১)^{\text{ন}}\right\} \frac{১}{৬}\pi$; এস্থলে ন এর পরিমাণফল যদ্যপি ০, ১, ২, ৩ ইত্যাদিক্রমে ধরা যায়, তাহা হইলে উক্ত সূত্র দ্বারা এই শ্রেণীবদ্ধ কোণ সকল পাওয়া যায়; $\frac{১}{৬}\pi$, $\frac{৫}{৬}\pi$, $\frac{১৩}{৬}\pi$, $\frac{১৭}{৬}\pi$ ইত্যাদি।

পঞ্চম অধ্যায়।

Given Trignometrical Ratio, describe the angles.

ত্রৈকোণমৈতিক অনুপাত পাইলে কোণ নির্দ্দিষ্টকরণ।

দত্ত শাইন এবং কোশাইন হইলে কোণ অঙ্কিতকরণ।

সেই কোণ দেখাও যাহার দত্ত শাইন চ রাশি।

* এক বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহার ব্যাসের পরিমাণ ১ হয় এবং কখ ঐ বৃত্তের ব্যাস মনে কর। খকে কেন্দ্র করিয়া এবং চ পরিমাণ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, তাহা হইলে ঐ বৃত্ত প্রথম বৃত্তকে দুই স্থানে ভেদ করিবে অতএব গ বিন্দু দুই এর এক স্থান হউক; কগ ও খগ যোগ কর, খকগ সেই কোণ হয় যাহার দত্ত শাইন চ পরিমাণ; কারণ কগখ সমকোণ হয় এবং খকগ এর শাইন $\frac{\text{খগ}}{\text{কখ}} = \frac{\text{চ}}{১} = \text{চ}$ অতএব খকগ হয় সেই কোণ যাহার দত্ত শাইন চ হয়।

আবশ্যক কোণের কোশাইনের পরিমাণ ছ হয়, উক্তরূপে ক্ষেত্র অঙ্কিত কর কেবল শাইনকে কোশাইন জ্ঞান করিলে সপ্রমাণ হইবে। এস্থানে কখগ সেই কোণ অঙ্কিত হইল, যাহার কোশাইন দত্ত ছ রাশির তুল্য; কারণ কগখ সমকোণি ত্রিভুজ ক্ষেত্র, এবং কখগ কোণের কোশাইন $\frac{\text{খগ}}{\text{কখ}} = \frac{\text{ছ}}{১} = \text{ছ}$। অতএব কখগ কোণের কোশাইনই নির্দ্দিষ্ট ছ রাশির তুল্য হইল।

দত্ত টেঞ্জেণ্ট ও কোটেঞ্জেণ্টের কোণ অঙ্কিত কর।

প্রথমতঃ এমন একটী কোণ নির্ণয় কর যাহার টেঞ্জেণ্ট নির্দ্দিষ্ট চ রাশির তুল্য।

† কখ এমন এক সরল রেখা লও যাহার পরিমাণ এক হয়। কখ রেখার উপরে খগ এক লম্ব টান এবং তাহার পরিমাণ চ রাশির তুল্য মনে কর ও গক পরস্পর যোগ কর। তাহা

---

* চিত্র ১৭ দেখ।

† চিত্র ১৮ দেখ।

হইলেই খকগ এর টেঞ্জেণ্ট $= \frac{খগ}{কখ} = \frac{চ}{১} =$ চ ; অতএব খকগ এই কোণই এরূপে অঙ্কিত হইল যাহার টেঞ্জেণ্ট চ রাশির তুল্য।

প্র—এমত একটী কোণ নির্ণয় কর, যাহার কোটেঞ্জেণ্ট নির্দ্দিষ্ট ছ রাশির সমান হইবে।

উক্তরূপ ক্ষেত্র অঙ্কিত কর, তাহা হইলেই কগখ কোণের কোটেঞ্জেণ্ট = টেঞ্জেণ্ট খকগ = চ ; অতএব কগখ এমন এক কোণ অঙ্কিত হইল, যাহার কোটেঞ্জেণ্টের পরিমাণ চ রাশির তুল্য।

যদ্যপি এমত কোণ জানা আবশ্যক হয় যাহার কোশিক-ণ্ডের পরিমাণ নির্দ্দিষ্ট আছে।

এইরূপ কোণের পরিমাণ জানিতে হইলে কোশিকণ্ড = $\frac{১}{শাইন}$; অতএব ঐ কোণের শাইনও জানা যাইতে পারে ; (সংজ্ঞা দ্বারা)। এইরূপ দত্ত শিকণ্ডের কিম্বা দত্ত ভারশেট শাইনের কোণ যদ্যপি জানা আবশ্যক হয়, তাহা হইলে ঐ কোণের কোশাইনও জানা যাইতে পারে (সংজ্ঞা দ্বারা)।

এক্ষণে আমরা এমন সূত্র সকল প্রকাশ করিব, যদ্দ্বারা সকল প্রকার কোণ প্রকাশ করা যাইতে পারিবে এবং তাহা-দিগের একই দত্ত ত্রিকোণমিতি অনুপাত (রেশীয়ও) থাকিবে। আমরা এই অধ্যায়ের অবশিষ্ট অংশে এরূপ কোণ সকল প্রকাশ করিব, যাহাদিগের সচরাচর বৃত্তিক পরিমাণ ঘটিয়া থাকে।

প্র—যে সকল প্রকার কোণের দত্ত শাইন একই হয়, সেই সকল কোণ প্রকাশ করিবার নিমিত্ত সূত্র নির্দ্দিষ্ট কর।

* খ ক গ এক লঘিষ্ঠ ধন কোণ হউক, যাহার শাইন দত্ত নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ হয়। এবং এই কোণ চ নামে ব্যক্ত হউক। এক্ষণে খককে খ' বিন্দু পর্য্যন্তও কগ' রেখাকে এমন রূপে অঙ্কিত কর যাহাতে খ'কগ' কোণ = খকগ কোণ হয়। তাহা হইলেই খকগ' = π—চ।

এই ক্ষেত্র দ্বারা ইহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, যে সকল ধন কোণের একই পরিমাণের শাইন আছে (যেমন চ কোণের আছে) সেই সকল কোণ সমান হয় π—চ; এবং আর এমন কোণ সকল যাহারা চ কোণেতে এবং π—চ কোণেতে একত্রে সমষ্টিতে চারি সমকোণের কোন এক গুণ কোণ যোগ করিলে জন্মে, তাহারাও উক্ত প্রকার কোণ হয়। চ যদ্যপি কোন সংখ্যা হয়, তাহা হইলে ঐ সকল কোণ প্রকাশকরিবার এই দুই সূত্র আছে; যথা ১ম, ২ন π + চ এবং ২য়, ২ন π + π — চ; এস্থানে ন এর সংখ্যা শূন্যও হইতে পারে, এবং কোন ধনাত্মক অখণ্ড রাশিও হইতে পারে। আবার ঋণ কোণ সকল যাহাদের একই প্রকার শাইন থাকে (যেমন চ কোণের আছে) তাহাদিগকে প্রকাশ করিবার এই দুটী সূত্র আছে, যথা, ১ম—(π + চ); ২য়—(২ π - চ); এবং ইহাদের সমষ্টি যে চারি সমকোণ হয়, তাহাকে কোন এক ঋণ সংখ্যার দ্বারা গুণ করিলে যে ফল হয় তাহাকে ঐ দুই প্রকার প্রকাশিত ঋণ কোণদিগের সহিত যোগ করিলে যে প্রকার কোণ

* চিত্র ১৯ দেখ।

সকল জন্মায়, তাহারাও ঐ প্রকার কোণ হয় অর্থাৎ এই দুই সূত্রান্তর্গত কোণের মধ্যে পরিগণিত। দুই সূত্র এই ১ম, ২ন π—(π + চ); ২য়, ২ ন π—(২ π—চ); এস্থানে ন শূন্যও হইতে পারে এবং কোন ঋণাত্মক অখণ্ড রাশিও হইতে পারে।

এক্ষণে নিম্নলিখিত সাধারণতঃ নিয়ম দ্বারা পরীক্ষা করিলে জানা যাইতে পারে, যে ঐ সকল প্রকার কোণ এই সূত্রে দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা ১ম সূত্রে ন π + (—১)^{ন} চ এস্থানেও ন শূন্য হইতেও পারে. এবং কোন অখণ্ড ধনাত্মক কিম্বা ঋণাত্মক রাশিও হইতে পারে। আরো এই সূত্র দ্বারা যে সকল কোণ প্রকাশ করা যায়, সে সকল কোণ পূর্ব্বোক্ত সূত্র দ্বারাও প্রকাশ করা যাইতে পারে। অতএব সকল প্রকার কোণই (অর্থাৎ যাহাদের শাইন চ কোণের মত একই প্রকার হয়) ন π + (—১)^{ন} চ; এই সূত্রের অন্তর্গত হইতে পারে।

প্র—যে সকল প্রকার কোণের কোশাইনের দণ্ড পরিমাণ একই প্রকার, সেই সকল কোণ প্রকাশ করিবার জন্য সূত্র ব্যক্ত করা যাইতেছে। খ ক গ এক লঘিষ্ঠ ধন কোন হউক, এবং ইহার কোশাইন দণ্ড রাশি হউক, আর উক্ত কোণকে চ কহা যাউক।

এক্ষণে খ ক গ' কোণকে খ ক গ কোণের সমান কর। এই ক্ষেত্র দ্বারা ইহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, যে সকল ধন কোণের কোশাইন সমান হয়, (যেমন চ কোণের) গ' আছে তাহারাই ঐ প্রকার কোণ। প্রথমতঃ ২ π—চ এবং দ্বিতীয়তঃ

সমষ্টি চারি সমকোণকে কোন এক রাশি দিয়া গুণ করিলে যে ফল জন্মে, সেই ফল চ কোণ কিম্বা ২ π—চ কোণেতে যোগ করিলে যে কোণ সকল উৎপন্ন হয়, তাহা-রাও উক্ত প্রকার (কোণের মধ্যবর্ত্তী) কোণ হয়। অর্থাৎ ঐ সকল কোণ এই দুই সূত্রের অন্তর্ভূ́ত, ১ম ২ন π + চ, ২য়, ২ ন π + ২ π—চ। এস্থানে ন শূন্যও হইতে পারে, এবং কোন ধনাত্মক অখণ্ড রাশিও হইতে পারে, আরও এই প্রকার ঋণ কোণ সকল যাহাদিগের সমান কোশাইন হয়; যেমন (চ কোণের আছে) তাহারাও এই সকল কোণের অন্তর্ভূ́ত। প্রথমতঃ—চ এবং—(২ π—চ) এবং দ্বিতীয়তঃ সমষ্টি চারি সমকোণকে কোন এক রাশিদ্বারা গুণ করিলে যে ফল জন্মে, সেই ফলকে ঋণাত্মক মনে করিয়া উপরোক্ত প্রকাশিত—চ কোণ কিম্বা—(২ π—চ) কোণে যোগ করিলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারাও এই প্রকার কোণ হয়; অর্থাৎ এই দুই সূত্রের অন্তর্ভূ́ত যে সকল কোণ হইতে পারে, যথা ২ ন π—চ এবং ২ ন π—(২ π—চ)।

এস্থানে ন শূন্যও হইতে পারে কিম্বা কোন অখণ্ড ধনা-ত্মক বা ঋণাত্মক রাশিও হইতে পারে। এই সমস্ত কোণ যাহাদিগকে উপরে প্রকাশ করা গেল, তাহারাও এই সূত্রের অন্তর্ভূ́ত।

২ ন π ± চ;

এস্থানেও ন শূন্য হইতে পারে, এবং ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইয়া অখণ্ডরাশিও হইতে পারে। আর এই সূত্রেতে যে সকল কোণভুক্ত হইতে পারে, তাহারা উপরোক্ত প্রকাশিত

কোণ সকলের মধ্যেও হইতে পারে। অতএব এই সূত্রেতে ২ ন π ± চ ভুক্ত আছে, যে সকল কোণ ও যাহাদিগের কোশাইন চ কোণের কোশাইনের সহিত সমান এবং যে সকল কোণের কোশাইন চ কোণের কোশাইনের সহিত সমান সে সকল কোণ ঐ সূত্রের অন্তর্ভূত হইবে।

যে সকল কোণের শিকণ্ড কিম্বা ভারশেট শাইন চ কোণের শিকণ্ড বা ভারশেট শাইনের সহিত সমান হয়, এই সূত্র দ্বারা সেই সকল কোণও প্রকাশ করা যাইতে পারে।

যে সকল কোণের দত্ত টেঞ্জেণ্ট একই প্রকার হয়, সেই সকল কোণ প্রকাশ জন্য সূত্র ব্যক্ত করা যাইতেছে।

* খ ক গ এক লঘিষ্ঠ ধন কোণ হউক, এবং ইহার টেঞ্জেণ্ট দত্ত রাশি মনে কর। আর এই কোণ চ নামে ব্যক্ত হউক। এক্ষণে খক কে খ' বিন্দু পর্য্যন্ত ও গক কে গ' বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। এই ক্ষেত্র দ্বারা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, যে সকল ধন কোণের টেঞ্জেণ্ট চ কোণের টেঞ্জেণ্টের সহিত সমান হয় সে সকল কোণ এই সূত্রের অন্তর্গত। প্রথমতঃ π + চ এবং দ্বিতীয়তঃ সমষ্টি চারি সমকোণকে কোন এক রাশি দ্বারা গুণ করিলে যে ফল হয়, সেই ফল চ কিম্বা π + চ কোণেতে যোগ করিলে, যে কোণ সকল উৎপন্ন হয় সে সকল কোণও এই প্রকার। অর্থাৎ এই দুই সূত্রের অন্তর্ভূত। যথা ২ ন π + চ এবং ২ ন π + π + চ, এস্থানে নএর পরিমাণ শূন্যও হইতে পারে। কিম্বা কোন ধনাত্মক অখণ্ড রাশিও হইতে পারে। আর ঋণ কোণ সকল যাহাদের টেঞ্জেণ্ট

* চিত্র ২১ দেখ।

চ কোণের টেঞ্জেণ্টের সহিত সমান তাহারা এইরূপ হয় যথা প্রথমতঃ—(π—চ), এবং—(২ π—চ) এবং দ্বিতীয়তঃ সমষ্টি চারি সমকোণকে কোন এক সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে যে ফল হয়, তাহাকে ঋণাত্মক জ্ঞান করিয়া উক্ত প্রকাশিত কোণ সকলেতে যোগ করিয়া যে সকল কোণ উৎপন্ন হয় তাহারাও ঐ প্রকার কোণ হয়। অর্থাৎ তাহারা এই দুই সূত্রের অন্তর্ভূত যথা ২ ন π—(π—চ) এবং ২ ন π—(২ π—চ); এস্থানে ন শূন্য হইতেও পারে এবং কোণ ঋণাত্মক অখণ্ড রাশিও হইতে পারে। সমস্ত কোণ যাহাদিগকে এই প্রকার প্রকাশ করা গেল তাহারা এই সূত্রের অন্তর্ভূত আছে।

ন π + চ

এস্থানেও ন শূন্য হইতে পারে এবং কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ডরাশিও হইতে পারে। আর সমস্ত কোণ যাহারা এই সূত্রেতে ভুক্ত আছে তাহাদিগকে উপরোক্ত কোণ সকল যেরূপ প্রকাশিত হইয়াছে তাহাদের মধ্যে পাওয়া যাইতে পারে। অতএব যে সকল কোণের একই দত্ত টেঞ্জেণ্ট হয় সে সকল কোণ প্রকাশ জন্য ন π + চ, এই সূত্র হইল ইতি।

আর যে সকল কোণের কোটেঞ্জেণ্ট চ কোণের কোটে-ঞ্জেণ্টের সহিত সমান হয়, সে সকল কোণও এই সূত্রদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

এই অধ্যায় সমাপ্ত করিবার পূর্ব্বে ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় ফংসনের বিষয় কিছু ব্যক্ত করিব, আমরা উহাদিগকে ত্রিকোণ-মিতি সম্বন্ধীয় অনুপাত (রেশীও) অর্থাৎ সমকোণিক

ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ভুজ সকলের পরস্পর কি প্রকার সম্বন্ধ তাহা প্রকাশ করিয়াছি, কিন্তু পূর্ব্বকালে এই সকলের সংজ্ঞা ভিন্নরূপে প্রকাশ করিত।

* ক কোন একটী বৃত্তের কেন্দ্র হউক, কখ ব্যাসার্দ্ধ হউক এবং খপ কোন এক পরিধি অংশ মনে কর। আর কগ ব্যাসার্দ্ধকে কখ এর উপরিভাগে লম্ব করিয়া টান এবং খ ও গ বিন্দু হইতে টেঞ্জেণ্ট টান ও ক প কে বৃদ্ধি কর, তাহাতে চ বিন্দুতে প্রথম টেঞ্জেণ্ট ও ছ বিন্দুতে দ্বিতীয় টেঞ্জেণ্ট স্পর্শ করিবে। পরে প ম রেখাকে ক খ রেখার উপরে লম্বভাবে অঙ্কিত কর। তাহা হইলে প্রাচীন সংজ্ঞার মতে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রের সরল রেখা সকলকেই খ প পরিধি অংশের ফংসন কহিতে পারা যায়।

আর খ প পরিধি অংশের শাইন প ম, ও ক ম ইহার কোশাইন, আর খ চ এই বৃত্তাংশের টেঞ্জেণ্ট এবং গ ছ ইহার কোটেঞ্জেণ্ট, ক চ ইহার শিকণ্ড ও ক ছ ইহার কোশি-কণ্ড, খ ম ইহার ভারসেট শাইন কহা যায়। আরও ঐ খ এবং প বিন্দুকে যে সরল রেখা যোগ করে, সেই রেখাকে ঐ পরিধি অংশের (Chard) চার্ড কহে।

অতএব এই প্রকার শাইন, কোশাইন, টেঞ্জেণ্ট ইত্যাদি সকলে, পূর্ব্বকালে কোন এক রেখা মাত্র প্রকাশ করিত, রেশীও (অনুপাত) প্রকাশ করিত না। পূর্ব্বকালে শাইন, কোশাইন, টেঞ্জেণ্ট ইত্যাদি সকলের লম্ব পরিমাণ ব্যাসা-র্দ্ধের উপর নির্ভর করিত, অতএব কোন বিষয় জানিতে

* চিত্র ২২ দেখ।

হইলে কি পরিমাণের ব্যাসার্দ্ধ ব্যবহার হইয়াছে, তাহা প্রকাশ করিয়া জানাইতে হইত। প্রাচীন এবং আধুনিক ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় ফংসনদিগের পরিমাণফল এইরূপে মিশ্রিত করা যায়। যথা—

প ক খ কোণের শাইন $=\dfrac{\text{প ম}}{\text{ক প}}$ ∴ প ম = ক প × শাইন প ক খ। প খ পরিধি অংশের শাইন = প ম;

অতএব পরিধি অংশের শাইন = ব্যাসার্দ্ধ × কোণের শাইন, এবং কোণের শাইন $=\dfrac{\text{পরিধি অংশের শাইন}}{\text{বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ}}$।

এই প্রকার অন্য অন্য ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় ফংসন সকলে প্রাচীন ও নূতন নিয়মের পরিমাণফল প্রকাশ করা যাইতে পারে। অর্থাৎ নূতন নিয়মের সূত্র হইতে (যাহাতে কোণের ফংসন ব্যক্ত করে) পুরাতন নিয়মের সূত্র (যাহাতে বৃত্তের পরিধি অংশের ফংসন ব্যক্ত করে) এবং পুরাতন নিয়মের সূত্র হইতে নূতন নিয়মের সূত্র প্রকাশ করা যাইতে পারে।

উদাহরণ।

যদ্যপি ক কোন কোণ ধরা যায়, তাহা হইলে

$$\text{শান}^2\,\text{ক} + \text{কোশ}^2\,\text{ক} = 1$$

এস্থানে চ ঐ কোণের তলস্থ পরিধি অংশ মনে কর। এবং ঐ পরিধি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ ব হউক, তাহা হইলে প্রাচীনমতে,

$$\frac{\text{শান}^2\,\text{চ}}{\text{ব}^2} + \frac{\text{কোশ}^2\,\text{চ}}{\text{ব}^2} = 1$$

অতএব শান^2 চ + কোশ^2 চ = ব^2, এবং (Chard) চার্ড পথ = ২ শাইন অর্দ্ধ (Chard) পথ।

*কারণ পখ এক পরিধি অংশ হউক, কগঘ একটী ব্যাসার্দ্ধ মনে কর। এবং পখ চার্ড (Chard) কে গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত করিয়া এবং ঐ কগর উপরে লম্বভাবে পতিত হয় এরূপ করিয়া টান। পরে কগ রেখাকে ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। তাহা হইলে খপ = ২ পগ = ২ শান. পঘ; কিম্বা (Chard) পখ = ২ শান. অর্দ্ধ পখ পরিধি অংশ।

Chard কে রেশীও (অনুপাতীয়) পরিমাণেও প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা—

সমান পরিমাণের সরল রেখা কপ এবং কখ লও, এ দুই সরল রেখাতে খ ক প কোণ কিম্বা ক কোণ অঙ্কিত হইয়াছে, এক্ষণে ইহার—

$$\text{শান. } \tfrac{১}{২}\text{ক} = \frac{\text{পগ}}{\text{কপ}} = \tfrac{১}{২}\frac{\text{খপ}}{\text{কপ}} = \tfrac{১}{২}\frac{\text{খপ}}{\text{কখ}};$$

$$\text{এবং ২ শান. } \tfrac{১}{২}\text{ক} = \frac{\text{২ পগ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{পখ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{পখ}}{\text{কখ}} = \text{কর্ড খপ};$$

অর্থাৎ কর্ড পখ = কখ × ২ শান. ½ ক = ব. ২ শান. ½ ক; এস্থানে ব = ব্যাসার্দ্ধ ধরিতে হইবে।

অতএব কোন এক পরিধি অংশের কর্ড = ব্যাসার্দ্ধ × তদুপরিস্থ ½ কোণের দ্বিগুণ শাইন।

এক পরিধি অংশের শাইন = ব্যাসার্দ্ধ × তদুপরস্থ কোণের শাইন; অতএব যদ্যপি ব্যাসার্দ্ধ পরিমাণ ১ ধরা যায় তাহা হইলে পুরাতন এবং নূতন উভয় মতেই শাইনের পরিমাণফল সমান অঙ্ক হইবে। এবং তাহা হইলে

* চিত্র ২৩ দেখ।

আর আর ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় ফংসন সকলেরও ঐরূপ সমান ফল হইবে। অতএব এই প্রকার কোন সূত্র যাহা পুরাতন মতে প্রকাশিত হয়, তাহাকে নূতন মতের সূত্রেতে অনায়াসে আনয়ন করা যাইতে পারে। যদ্যপি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের পরিমাণ এক ধরা যায় ইতি।

ষষ্ঠ অধ্যায়।

দুই কোণের ত্রিকোণমিতি সম্বন্ধীয় রেশীও।

সমষ্টি দুই কোণের শাইন এবং কোশাইন উহাদের প্রত্যেকের শাইন এবং কোশাইনের দ্বারা প্রকাশ করণ।

* মনে কর খকগ এক কোণ হউক, এবং গকঘ আর এক কোণ হউক; আর প্রথম কোণের নাম ক, ও দ্বিতীয় কোণের নাম খ হউক। তাহা হইলে খকঘ কোণ ক + খ দ্বারা জানা যাইবে। কঘ রেখাতে কোন এক বিন্দু প লইয়া, কখ এর উপরে এক লম্ব পম, এবং কগ এর উপরে এক লম্ব পচ টান। পরে চ হইতে চছ এক লম্ব পম এর উপর, এবং চজ এক লম্ব কখ এর উপরে অঙ্কিত কর।

এক্ষণে $\angle$ চপছ $= 90^\circ - \angle$ পচছ $=$

$\angle$ ছচক $= \angle$ চকখ $=$ ক।

অতএব শান. (ক+খ) = শান. খকঘ $= \frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{ছম} + \text{ছপ}}{\text{কপ}}$

* চিত্র ২৪ দেখ।

$= \frac{\text{চজ} + \text{ছপ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{চজ}}{\text{কপ}} + \frac{\text{ছপ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{চজ}}{\text{কচ}} \cdot \frac{\text{কচ}}{\text{কপ}} + \frac{\text{ছপ}}{\text{পচ}} \cdot$

$\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}}$ (এস্থানে) $\frac{\text{চজ}}{\text{কচ}}$ = শান. ক, $\frac{\text{কচ}}{\text{কপ}}$ = কোশ. খ ; $\frac{\text{পছ}}{\text{পচ}}$ =

কোশ. ক ; এবং $\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}}$ = শান. খ ; সুতরাং

শান. (ক+খ) = শান. ক. কোশ. খ, + কোশ. ক. শান. খ।

কোশ. (ক+খ) = কোশ. খকষ = $\frac{\text{কম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ — জম}}{\text{কপ}}$

$= \frac{\text{কজ — চছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ}}{\text{কপ}} - \frac{\text{চছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ}}{\text{কচ}} \cdot \frac{\text{কচ}}{\text{কপ}} - \frac{\text{চছ}}{\text{পচ}} \cdot$

$\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}}$ কিন্তু $\frac{\text{কজ}}{\text{কচ}}$ = কোশ. ক, $\frac{\text{কচ}}{\text{কপ}}$ = কোশ. খ, $\frac{\text{চছ}}{\text{পচ}}$ =

শান. ক ; এবং $\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}}$ = শান. খ ; অতএব কোশ. (ক + খ)

= কোশ. ক. কোশ. খ — শান ক. শান খ।

প্রতিজ্ঞা—দুই কোণের অন্তরের শাইন এবং কোশাইন উহাদের প্রত্যেকের শাইন এবং কোশাইনের দ্বারা প্রকাশ করণ।

* পূর্ব্ব ক্ষেত্র যেরূপে অঙ্কিত হইয়াছে এই ক্ষেত্রও সেইরূপ অঙ্কিত হইবে ; কেবল এই প্রভেদ যে, প্রথম ক্ষেত্রে চছ রেখা পম রেখার ভিতরে লম্বভাবে পতিত হইয়াছে, এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঐ চছ রেখা পম রেখাকে বিপরীত দিকে দীর্ঘ করিয়া লম্ব পাতিত হইয়াছে। আর অগ্রে যে কোণের নাম ক ও যে কোণের নাম খ হইয়াছে, এস্থানেও তাহাই হউক। এক্ষণে চছ রেখা কখ রেখার সমান্তরাল হেতু < ছচগ =

* চিত্র ২৫ দেখ।

< গকখ ; আর পচ, কগ রেখার উপরে লম্ব হওয়াতে < পচগ $= 90^\circ$ । অতএব < ছচগ $= 90^\circ -$ < পচছ এবং চপছ ত্রিভুজ ক্ষেত্র সমকোণিক হেতু < চপছ + পচছ $= 90^\circ$; এজন্য < চপছ $= 90^\circ -$ < পচছ ; কিন্তু < ছচগ $= 90^\circ -$ < পচছ, অতএব < চপছ = < ছচগ ; আবার < ছচগ = < গকখ সুতরাং < চপছ = < গকখ = < ক । আর < গকঘ = খ, এজন্য (ক — খ) = < খকপ ; অতএব এস্থানে

$$\text{শান.}\,(\text{ক}-\text{খ}) = \text{শান. খকপ} = \frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{ছম}-\text{পছ}}{\text{কপ}} =$$

$$\frac{\text{চজ}-\text{পছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{চজ}}{\text{কচ}}\cdot\frac{\text{কচ}}{\text{কপ}} - \frac{\text{পছ}}{\text{পচ}},\cdot\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}},\ \text{কিন্তু}\ \frac{\text{চজ}}{\text{কচ}}$$

$$= \text{শান. ক},\ \frac{\text{কচ}}{\text{কপ}} = \text{কোশ. খ, আর}\ \frac{\text{পছ}}{\text{পচ}} = \text{কোশ. ক},$$

$$\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}} = \text{শান. খ, অতএব শান.}\,(\text{ক}-\text{খ}) = \text{শান ক.}$$

কোশ. খ — কোশ. ক. শান. খ।

$$\text{আবার কোশ.}\,(\text{ক}-\text{খ}) = \text{কোশ. খকপ} = \frac{\text{কম}}{\text{কপ}}$$

$$= \frac{\text{কজ}+\text{জম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ}+\text{চছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ}}{\text{কপ}} + \frac{\text{চছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{কজ}}{\text{কচ}}$$

$$\frac{\text{কচ}}{\text{কপ}} + \frac{\text{চছ}}{\text{পচ}}\cdot\frac{\text{পচ}}{\text{কপ}}\ ;\ \text{কিন্তু}\ \frac{\text{কজ}}{\text{কচ}} = \text{কোশ. ক},\ \frac{\text{কচ}}{\text{কপ}}$$

$$= \text{কোশ. খ},\ \frac{\text{চছ}}{\text{পচ}} = \text{শান. ক, এবং}\ \frac{\text{পচ}}{\text{কপ}} = \text{শান. খ}\ ;$$

অতএব কোশ. (ক — খ) = কোশ. ক. কোশ. খ + শান. ক. শান খ। পূর্ব্বোক্ত উপপত্তি সকল সুন্দররূপে স্মরণ থাকিবার নিমিত্ত সুস্পষ্টরূপে দেখান যাইতেছে যে, এক্ষণে যে প্রকার কোণের বিষয় উল্লেখ করা যাইতেছে সেই প্রকার

উভয় কোণের সাধারণ রেখা যেটী অর্থাৎ যে সরল রেখা ঐ উভয় কোণকে বদ্ধ রাখে সেই রেখার উপরে প বিন্দু নির্দ্দেশ করিতে হইবে। যথা—

শান. (ক+খ) এবং কোশ. (ক+খ) এর সূত্রগণের উপপত্তির প্রমাণ করিবার জন্য ক+খ কোণের যে সাধারণ রেখা আছে, তাহারই উপর প বিন্দু লওয়া হইয়াছে; এবং শান. (ক—খ) ও কোশ. (ক—খ) এর সূত্রদিগের উপপত্তি প্রমাণের জন্যও ক—খ কোণের রেখার উপর প বিন্দু লওয়া হইয়াছে। আর ক্ষেত্রপাত হইলে ইহাই বিশেষরূপে জানা আবশ্যক যে, চপছ কোণ ক কোণের সমান; আর ইহা ক্ষেত্র দ্বারাও সুন্দর প্রমাণ হইয়েছে যে, ইহা হইবেই হইবে। কারণ পচ, ছপ রেখারা উভয়েই স্ব স্ব লম্বভাবে আছে। এই দুই রেখার উপরে যাহারা (যে দুই রেখায়) ক কোণ নির্ম্মাণ করে তাহারা অর্থাৎ পচ ও ছপ রেখারা যে কোণ নির্ম্মাণ করে, সে কোণও ক কোণের সহিত সমান; যেমন চপছ কোণ আছে।

( ) এবং ( ) সংজ্ঞাতে যে যে সূত্রগুলি প্রমাণ করা গিয়াছে, কোণের অবস্থা যেরূপ হউক না কেন, তাহারা নিশ্চয়ই সত্য ও সিদ্ধ। ছাত্রেরা যদ্যপি ক্ষেত্রপাত দ্বারা ইহার ভিন্ন ভিন্ন অবস্থা সকলে উপপত্তি করিয়া দেখেন তাহা হইলে সহজেই ইহার যথার্থ প্রমাণ সকল উপলব্ধি করিতে পারিবেন। তাঁহারা ক্ষেত্রপাত করিতে গেলে কোণের অবস্থা হেতু কখন কখন এই ভিন্নভাব দেখিতে পাইবেন যে, ঐ লম্ব সকল কোন সীমাবিশিষ্ট সরল রেখার ভিতরে না

পড়িয়া, কোন কোন অবস্থায় তাহারা উক্ত সীমাবিশিষ্ট রেখাদিগের বর্দ্ধিত অংশের উপর পতিত হইয়াছে। Art. 76 তে যে সূত্রের উল্লেখ আছে, তাহাতে লম্বের ভিন্ন-ভাব হইতে পারে, আমরা উদাহরণ দ্বারা দেখাইতেছি। যখন ক এবং খ কোণ প্রত্যেকে এক এক সমকোণ হইতে ন্যূন হয় এবং তাহাদের সমষ্টি একত্র যোগে এক সমকোণ হইতে বড় হয়, তচ্ছথা—

* খকগ এক কোণ তাহার নাম ক, এবং গকঘ এক কোণ তাহার নাম খ, ইহাদিগকে প্রত্যেককে এক সমকোণ হইতে ন্যূন মনে কর। তাহা হইলে খকঘ কোণ = ক + খ হইবে। কঘ রেখার মধ্যে প নামক এক বিন্দু লও, এবং প বিন্দু হইতে খক রেখাকে বর্দ্ধিত করিয়া তাহাতে পম নামক একটী লম্ব এবং কগ এর উপরে পচ নামক আর একটী লম্ব টান। আবার চ বিন্দু হইতে চছ নামক এক লম্ব পম এর উপর এবং চজ এক লম্ব কখ এর উপরে অঙ্কিত কর। এক্ষণে পছচ এক সমকোণিক ত্রিভুজ অতএব পচছ কোণের কমপ্লীমেণ্ট চপছ কোণ; এবং পচক এক সমকোণ, অতএব পচছ কোণের কমপ্লীমেণ্ট ছচক কোণ; সুতরাং চপছ কোণ ও ছচক কোণ প্রত্যেকে পচছ কোণের কমপ্লীমেণ্ট হওয়াতে চপছ কোণ ও ছচক কোণ পরস্পর সমান। আবার চছম এবং ছমখ কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের তুল্য, হেতু চছ ও খম এই দুই রেখা সমান্তরাল। সুতরাং ছচক কোণ চকখ কোণের

* চিত্র ২৬ দেখ।

সমান অর্থাৎ ক কোণের সমান। কিন্তু ছচক, চপছ কোণের সমান তন্নিমিত্ত চপছ কোণ ক এর সমান।

এক্ষণে শান. (ক + খ) = শান. খকঘ = $\frac{পম}{কপ} = \frac{মছ + পছ}{কপ}$

$= \frac{মছ}{কপ} + \frac{পছ}{কপ} = \frac{চজ}{কপ} + \frac{পছ}{কপ} = \frac{চজ}{কচ} . \frac{কচ}{কপ} + \frac{পছ}{পচ}$ $\frac{পচ}{কপ}$ = শান. ক. কোশ. খ + কোশ. ক. শান. খ; আর কোশ. (ক + খ) = $\frac{কম}{কপ}$।

পূর্ব্বে কথিত হইয়াছে যে, কম রেখা ক বিন্দুর বামদিকে টানা হইয়াছে, সুতরাং ইহা ঋণাত্মক, এবং কম এর পরিবর্ত্তে জম—কজ রাখ, তাহা হইলেই —কম = —(জম—কজ) = কজ—জম = কজ—চছ হইবে, অতএব কোশ. (ক + খ) = $\frac{কম}{কপ} = \frac{কজ—চছ}{কপ} = \frac{কজ}{কপ} — \frac{চছ}{কপ} = \frac{কজ}{কচ} . \frac{কচ}{কপ}$ $— \frac{চছ}{পচ} \frac{পচ}{কপ}$ = কোশ. ক. কোশ. খ—কোশ. পচছ. শান. খ; কিন্তু কোশ. পচছ = শান. চপছ = শান. ক; তন্নিমিত্ত কোশ. (ক + খ) = কোশ. ক. কোশ. খ—শান. ক. শান. খ।

Art. 76 এবং 77 তে যে সকল সূত্র প্রমাণ করা গিয়াছে, তাহারা ত্রিকোণমিতির মূল সূত্র; তন্নিমিত্ত উহাদের যে সাধারণতঃ সত্য তাহার যথার্থতা জানান অতি আবশ্যক। পূর্ব্বোক্ত সংজ্ঞাতে যেরূপ উল্লেখ করা গিয়াছে, সেইরূপ এ স্থানেও ঐ সকল সূত্রদের যে নানাপ্রকার অবস্থা যাহা সম্ভত ঘটিতে পারে, সেই সমস্ত অবস্থা ছাত্রগণ অনুধাবন পূর্ব্বক পরীক্ষা করিয়া আপনারাই জানিতে পারিবেন যে,

ঐ সকল সূত্র সাধারণতঃ সত্য বটে, কিন্তু যে সকলে সূত্র আমরা সম্পূর্ণরূপে স্থাপন করিয়াছি তাহারদের মধ্যে কতকগুলি দ্বারা এই সকল সূত্রের সাধারণতঃ ফল দর্শান যাইতে পারে। যে সকলে সূত্র প্রমাণ করা যাইবে তাহারা এই—

শান. (ক + খ) = শান. ক. কোশ. খ + কোশ. ক শান. খ, ... (১)

কোশ. (ক + খ) = কোশ. ক. কোশ. খ—শান. ক. শান. খ, ... (২)

শান. (ক—খ) = শান. ক. কোশ. খ— কোশ. ক. শান. খ,... ... ... (৩)

কোশ. (ক—খ) = কোশ. ক. কোশ. খ + শান. ক. শান. খ, ... (৪)

* এক্ষণে কোণের পরিমাণ যেরূপ হউক না কেন,

77 Art. তে যাহা দেখান গিয়াছে; তাহাতে এই প্রকার সপ্রমাণ করা যাইতে পারে। যথা মনে কর, ক কোণের পরিমাণ ১৮০° হইতে ২২৫° এর মধ্যে আছে এবং ক—খ, ৪৫° হইতে ৯০° এর মধ্যে আছে। ইহারা অর্থাৎ ক—খ এর শাইন এবং কোশাইন কত হইবে?

এক্ষণে এই ক্ষেত্রপাত এই হইয়াছে যে খকগ = ক, ও গকঘ = খ এবং পচ রেখা কগ রেখার বিপরীত দিকে বর্দ্ধিত অংশের উপরে অঙ্কিত হইয়াছে, সুতরাং শান. (ক—খ) = শান. খকঘ = $\frac{\text{পম}}{\text{কপ}} = \frac{\text{ছম} + \text{পছ}}{\text{কপ}} = \frac{\text{চজ} + \text{পছ}}{\text{কপ}}$

* চিত্র ২৭ দেখ।

$= \frac{চজ}{কপ} + \frac{পছ}{কপ}$; $= \frac{চজ}{কচ} \cdot \frac{কচ}{কপ} + \frac{পছ}{পচ} \cdot \frac{পচ}{কপ}$; এবং

কোশ. (ক—খ) = কোশ. খকঘ = $\frac{কঘ}{কপ} = \frac{কজ — জঘ}{কপ}$

$= \frac{কজ—চছ}{কপ} = \frac{কজ}{কপ} — \frac{চছ}{কপ} = \frac{কজ}{কচ} \cdot \frac{কচ}{কপ} — \frac{চছ}{পচ} \cdot$

$\frac{পচ}{কপ}$ ।

কিন্তু $\frac{চজ}{কচ}$ = শান. খকগ' = শান. (ক—১৮০°) = শান.—

(১৮০—ক) = —শান. (১৮০°—ক) = —শান. ক (Art 49

দ্বারা)

$\frac{কচ}{কপ}$ = কোশ. ঘকগ' = কোশ. (১৮০°—খ) = —কোশ. খ ;

$\frac{পছ}{পচ}$ = শান. পচছ = কোশ. ছচক = কোশ. খকগ' = কোশ.

(ক—১৮০°) = কোশ.—(১৮০°—ক) = কোশ. (১৮০°—ক) =

—কোশ. ক ;

$\frac{পচ}{কপ}$ = শান. ঘকগ' = শান. (১৮০°—খ) = + শান. খ ;

$\frac{কজ}{কচ}$ = কোশ. খকগ' = —কোশ. ক ;

$\frac{চছ}{পচ}$ = কোশ. পচছ = শান. ছচক = শান. খকগ' = শান.

(ক—১৮০°) = শান.—(১৮০°—ক) = —শান. (১৮০°—ক)

= —শান. ক ;

অতএব শান. (ক—খ) = (—শান. ক) (—কোশ. খ) +

(—কোশ. ক) (+ শান. খ) = শান. ক কোশ. খ—কোশ. ক

শান. খ ;

কোশ. (ক—খ) = (—কোশ.) (—কোশ. খ)—(—শান. ক) (+ শান. খ) = কোশ. ক কোশ. খ + শান. ক শান. খ।

আমরা 76 এবং 77 সংজ্ঞাতে চারি সূত্রদিগকে এক এক করিয়া সম্পূর্ণরূপ জ্যামিতির উপপত্তি দ্বারা প্রমাণ করিয়া দেখাইয়াছি কিন্তু প্রথম দুই সূত্রফল দ্বারা দ্বিতীয় দুই সূত্রফল প্রমাণ করা যাইতে পারে। কেবল + খ এর স্থানে—খ লিখিতে হয়। যথা—

শান. (ক—খ) = শান. { ক + (–খ) } = শান. ক. কোশ. (–খ) + কোশ. ক. শান. (–খ) কিন্তু কোশ. –খ = কোশ. খ এবং শান.—খ = —শান. খ।

তন্নিমিত্ত শান. (ক—খ) = শান. ক কোশ. খ—কোশ. ক শান. খ।

আর কোশ. (ক—খ) = কোশ. { ক + (—খ) } = কোশ. ক কোশ. (–খ)—শান. ক শান. (–খ)।

কিন্তু পূর্ব্বোক্ত কারণ হেতু—

কোশ. (ক—খ) = কোশ. ক কোশ. খ + শান. ক শান. খ।

আবার—শান. (ক + খ) এর সূত্রফল হইতে কোশ. (ক + খ) এর সূত্রফল প্রকাশ করা যাইতে পারে।

কারণ, কোশ. (ক + খ) = শান. {৯০°—(ক + খ)} = শান. { (৯০°—ক) + (—খ) } = শান. (৯০°—ক) কোশ. (—খ) + কোশ. (৯০—ক) শান. (—খ);

কিন্তু শান. ৯০°—ক = + কোশ. ক ও কোশ. ৯০°—ক = + শান. ক। এবং শান. (—খ) = —শান. খ ও কোশ. (—খ) = + কোশ. খ; তন্নিমিত্ত কোশ. (ক + খ) = কোশ. ক কোশ.

খ—শান. ক শান. খ। এবং এইরূপে সামান্যতঃ এই চারি সূত্রফল মধ্যে কোন এক সূত্রফল হইতে অন্যান্য সূত্রফল সকল প্রকাশ করা যাইতে পারে।

পূর্ব্বে দেখান গিয়াছে যে যখন ক ও খ কোণ ধনাত্মক রাশি হয় এবং এক সমকোণ হইতে ন্যূন হয়, তখন উহারা ৭৬ ও ৭৭ সংজ্ঞাতে (১) এবং (২) সূত্রে লিখিলে সূত্রফলের সহিত সমান সমযোগী হয়। এবং ৭৭ সংজ্ঞাতে দেখান গিয়াছে যে (৩) এবং (৪) সূত্রফল ক এবং খ কোণের সম-যোগ্য হয় যখন ঐ ক ও খ কোণ ধনাত্মক হয়, এবং এক সমকোণ হইতে বৃহত্তর না হয়, কিন্তু ক কোণ যদ্যপি খ কোণ হইতে বৃহত্তর হয় এমন অবস্থাতে।

কারণ শান. $(৯০^\circ+ক+খ)=$ কোশ. $(ক+খ)=$ কোশ. ক. কোশ. খ—শান. ক. শান. খ।

কিন্তু ৫২ দ্বারা কোশ. ক $=$ শান. $(৯০^\circ+ক)$ এবং শান. ক $=$ —কোশ. $(৯০^\circ+ক)$ তন্নিমিত্ত শান. $(৯০^\circ+ক+খ)=$ শান. $(৯০+ক)$ কোশ. খ $+$ কোশ. $(৯০^\circ+ক)$ শান. খ। এইরূপ ক এবং খ এই উভয়েরই সীমা এক সমকোণ দ্বারা বৃদ্ধি করিলেও ঐ সূত্র ফল সকল সত্য প্রমাণ করা যাইতে পারে। কারণ—

শান. $\{(৯০^\circ+ক)+(৯০^\circ+খ)\}=$ শান. $\{১৮০^\circ+(ক+খ)\}$ $=$ —শান. $(ক+খ)=$ —(শান. ক কোশ. খ $+$ কোশ. ক শান. খ) $=$ —শান. ক. কোশ. খ—কোশ. ক. শান. খ; কিন্তু ৫২ সংজ্ঞা দ্বারা—

—শান. ক $=$ $+$ কোশ. $(৯০^\circ+ক)$;

$+$ কোশ. খ $=$ $+$ শান. $(৯০^\circ+খ)$;

—কোশ. ক = শান. (৯০°+ক) এবং
+ শান. খ = —কোশ. (৯০°+খ) ।

তন্নিমিত্ত শান. {(৯০ + ক) + (৯০° + খ)} = কোশ. (৯০°+ক) শান. (৯০°+খ)+শান. (৯০°+ক) কোশ. (৯০+খ) । কিম্বা শান. {(৯০ + ক) + (৯০ + খ) } = শান. (৯০°+ ক) কোশ. (৯০′ + খ) + কোশ. (৯০′ + ক) শান. (৯০° + খ) ।

কোন নির্দ্দিষ্ট পরিমাণের সীমাভুক্ত কোণ হইলেও (২) সূত্রের ফল যে সত্য হয়, তাহা পূর্ব্বে দেখান গিয়াছে, তদ্দ্বারা প্রত্যেক কোণের কিম্বা উভয় কোণের পরিমাণের সীমা ৯০° এর দ্বারা বৃদ্ধি করিলেও (১) সূত্রফল সত্য, তাহা উক্তরূপ প্রমাণ করা যাইতে পারে। এই প্রকার অনুভব অন্য সূত্রদিগের প্রতিও ব্যবহার করান যাইতে পারে। অতএব কোণের কিম্বা কোণদিগের সীমা যত ইচ্ছা তত বৃদ্ধি হইতে পারে (করা যাইতে পারে) ।

এক্ষণে আমরা দেখাইব যে ক কোণ খ হইতে বৃহত্তর না হইলেও (৩) এর এবং (৪) এর সূত্রফল যথার্থ হয়। যথা (ক—খ) = —(খ—ক) ।

কারণ ৪৯ সংজ্ঞা দ্বারা—শান. (ক—খ) = শান.—(খ—ক) = —শান. (খ—ক) । এবং কোশ. (ক—খ) = কোশ.—(খ—ক) = কোশ. (খ—ক) ।

কিন্তু ৭৬ সংজ্ঞা দ্বারা—শান. (খ—ক) = — (শান. খ. কোশ. ক—কোশ. খ. শান. ক) = কোশ. খ. শান. ক—শান. খ. কোশ. ক, = শান. ক. কোশ. খ—কোশ. ক. শান. খ ।
অতএব শান. (ক—খ) = —শান. (খ—ক)
= শান. ক. কোশ. খ—কোশ. ক. শান. খ ।

এবং কোশ. (ক—খ) = কোশ. (খ—ক = কোশ. খ. কোশ. ক+শান. খ. শান. ক, = কোশ. ক. কোশ. খ+শান. ক. শান. খ,

অতএব কোশ. (ক—খ) = কোশ. ক. কোশ খ—শান. ক. শান. খ হইবে। ইহাতে আরও এক্ষণে সপ্রমাণ হইতেছে যে, ক এবং খ কোণের পরিমাণ যে কোন সীমাভুক্ত হউক, ক কোণ খ কোণ হইতে বড় হইলে যদ্যপি (৩) এবং (৪) এর সূত্রফল সত্য হয়, তবে ঐ সীমাভুক্ত পরিমাণ থাকিয়া ক কোণ খ কোণ হইতে ছোট হইলেও (৩) এর এবং (৪) এর সূত্রফল যথার্থ হইবে। যথা—

* ঘ ক খ = ক হউক, ইহার সীমা ঘ ক এবং খ ক রেখাতে বদ্ধ, এবং খ ক গ = খ হউক, ইহার সীমা খ ক এবং ক গ এর দ্বারা বদ্ধ।

এস্থানে ক কোণ খ কোণ হইতে বৃহত্তর হয়, যখন ক এবং খ কোণের পরিমাণ উহাদের আপন আপন সীমাবদ্ধ রেখার মধ্যে ভিতর দিকে মাপা যায়; কিন্তু ক এবং খ কোণের আপনাপন সীমান্তঃপাতী ঐ রেখা বজায় রাখিয়া উহাদের পরিমাণ যখন ঐ স্ব স্ব সীমার বহির্দ্দিকে মাপা যায়, তখন ক কোণ খ কোণ হইতে বড় না হইয়া ছোট হয়। কিন্তু ক—খ = ঘ ক খ—খ ক গ = গ ক ঘ; এই অন্তরফল উভয় পক্ষেই সমান হয়, কিন্তু অন্তরফল, অন্তরস্থ ও বহিঃস্থ ভেদে পরস্পর বিপরীত বৈজিক চিহ্ন বিশিষ্ট হয়। অর্থাৎ অন্তরস্থ কোণ ধন কিম্বা ঋণ হইলে ($\pm$), বহিঃস্থ কোণের চিহ্ন যথাক্রমে ঋণ কিম্বা ধন ($\mp$) হইবে।

* চিত্র ২৮ দেখ।

পরিশেষে ইহা জ্ঞাতব্য যে, ঐ উভয় কোণ যদ্যপি ঋণ হয়, তাহা হইলেও উক্ত চারি সূত্রের সত্যতা সপ্রমাণ করা যায়। যথা—

মনে কর, ক এবং খ উভয়ই ঋণকোণ, অর্থাৎ –ক এবং–খ। —ক = ক১ ; —খ = খ১ হউক। তাহা হইলে ক = —ক১, = খ = —খ১ হইবে।

এবং শান. (ক + খ) = শান. {(—ক)+(—খ)} = শান.—(ক১ + খ১) = — শান. (ক১+ খ১) ৪৯ সংজ্ঞা দ্বারা = —শান. ক১ কোশ. খ১—কোশ. ক১ শান. খ১ কিন্তু —শান. ক১ = +শান. (—ক১) ; + কোশ. খ১ = + কোশ. (—খ১) ;—কোশ. ক১ = = —কোশ. (—ক১) ; + শান. খ১ = —শান. (—খ১)।

তন্নিমিত্ত শান. ক১ কোশ. খ১—কোশ. ক১ শান. খ = শান. (—ক১) কোশ. (—খ১) + কোশ. (—ক১) শান. (—খ১) ; আবার শান. (—ক১) = শান. ক, কোশ. (—খ১) = কোশ. খ। কোশ. (—ক১) = কোশ. ক, শান. (—খ১) = শান. খ। এবং শান. {(—ক১) + (—খ১)} = শান. (ক + খ) অতএব শান. (ক + খ) = শান. ক. কোশ. খ + কোশ. ক. শান. খ।

এইরূপে অন্য সূত্রফলগুলি সত্য প্রমাণ করা যাইতে পারে যদ্যপি উভয় কোণ কিম্বা উহাদের মধ্যে একটী কোণ ঋণ হয়, তাহা হইবে।

সপ্তম অধ্যায়।

ঐ চারি মূল সূত্র হইতে অন্যান্য নানাপ্রকার সূত্র প্রকাশ করা যাইতে পারে; অতএব এই প্রকার কতকগুলি সূত্র উদাহরণ হেতু নিম্নে প্রকাশ করিতেছি।

২ক কোণের রেশীয় সকল ক কোণের রেশীয় দ্বারা প্রকাশ করণ।

শান. (ক+খ) এবং কোশ. (ক+খ) সূত্রতে খ=ক মনে কর, তাহা হইলে শান. (ক+খ) = শান. ক. কোশ. খ+ কোশ. ক. শান. খ. ইহা সমান হইবে।

শান. (ক+ক) = শান. ক. কোশ. ক+কোশ. ক. শান. ক।
= ২ শান. ক. কোশ. ক; হইবে।

অতএব শান. ২ক = ২ শান. ক. কোশ. ক।

এইরূপে কোশ. ২ক = কোশ. (ক+ক) = কোশ. ক. কোশ. ক—শান. ক. শান. ক; = কোশ.^{২} ক—শান.^{২} ক = (১—শান.^{২} ক)—শান.^{২} ক = ১—২ শান.^{২} ক = কোশ.^{২} ক—(১—কোশ.^{২} ক) = ২ কোশ.^{২} ক—১। পরিশেষে সূত্রফল একত্র করিলে এই হয়।

কোশ. ২ক = ১—২ শান.^{২} ক

এবং কোশ. ২ক = ২ কোশ.^{২} ক—১

কিম্বা ১+কোশ. ২ক = ২ কোশ.^{২} ক

১—কোশ. ২ক = ২ শান.^{২} ক;

অতএব $\frac{\text{১—কোশ. ২ক}}{\text{১+কোশ. ২ক}} = \frac{\text{২ শান.}^{২}\text{ ক}}{\text{২ কোশ.}^{২}\text{ ক}}$ = টেন.^{২} ক।

এবং $\frac{১ + কোশ.২ ক}{১—কোশ. ২ ক} = \frac{২ কোশ.^{২} ক}{২ শান.^{২} ক} = কোটেন.^{২} ক।$

৭৬ এবং ৭৭ সংজ্ঞাতে যে সকল মূল সূত্র প্রকাশ করা গিয়াছে; সে সকল সূত্রদিগকে বহুতর প্রকার যোগাযোগ করা যাইতে পারে, যদ্দ্বারা অন্য অন্য সূত্র সকল প্রকাশ পায়। ইহারা ত্রিকোণমিতিসম্বন্ধীয় কার্য্যে বিশেষ ব্যবহার হয়। যথা—

আমরা পূর্ব্বে প্রকাশ করিয়াছি যে,—

শান. (ক+খ) = শান. ক. কোশ. খ + কোশ. ক. শান. খ;

শান. (ক—খ) = শান. ক. কোশ. খ—কোশ. ক. শান. খ;

কোশ. (ক+খ) = কোশ. ক. কোশ. খ—শান. ক. শান. খ;

কোশ. (ক—খ) = কোশ. ক. কোশ. খ+শান. ক. শান. খ।

অতএব শান. (ক+খ)+শান. (ক—খ) = ২শান. ক. কোশ খ (১)

শান. (ক+খ)—শান. (ক—খ) = ২ কোশ. ক. শান. খ...(২)

কোশ. (ক+খ)+কোশ. (ক—খ) = ২কোশ. ক. কোশ খ (৩)

কোশ. (ক—খ)—কোশ. (ক+খ) = ২ শান.ক. শান. খ (৪)

$\frac{১}{২}$ শান.{(ক+খ)+শান. (ক—খ)} = শান. ক. কোশ. খ (৫)

$\frac{১}{২}$ শান.{(ক+খ)—শান.(ক—খ)} = কোশ ক. শান খ (৬)

$\frac{১}{২}$ কোশ.{(ক+খ)+কোশ.(ক—খ)} = কোশ ক. কোশ.খ (৭)

$\frac{১}{২}$ কোশ.{(ক—খ)—কোশ.(ক+খ)} = শান.ক শান. খ (৮)

সুতরাং আবার শান. (ক+খ) × শান. (ক—খ)

= শান.^{২} ক কোশ.^{২} খ—কোশ.^{২} ক শান.^{২} খ = শান.^{২} ক (১-শান.^{২} খ)-(১-শান.^{২}ক) শান.^{২} খ = শান.^{২} ক-শান.^{২} ক. শান.^{২} খ-শান.^{২} খ+শান.^{২} ক. শান.^{২} খ = শান.^{২} ক-শান.^{২} খ;

কিম্বা—

= (১—কোশ.^{২} ক) কোশ.^{২} খ—কোশ.^{২} ক (১—কোশ.^{২} খ, = কোশ.^{২} খ—কোশ.^{২} ক; কোশ. (ক+খ)×কোশ.(ক—খ) = কোশ.^{২} ক কোশ.^{২} খ—শান.^{২} ক শান.^{২} খ, = কোশ.^{২} ক (১—শান.^{২} খ)—(১—কোশ.^{২} ক) শান.^{২} খ = কোশ.^{২} ক—শান.^{২} খ; কিম্বা = (১—শান.^{২} ক) কোশ.^{২} খ—শান.^{২} ক (১—কোশ.^{২} খ) = কোশ.^{২} খ—শান.^{২} ক।

উপরোক্ত শেষ ফলগুলি অতিশয় ব্যবহার্য্য এবং উহাদিগকে সহজে স্মরণ রাখা যাইতে পারে, যেহেতু প্রত্যেক গুণিতক ক এবং খ কোণের দুই বর্গ ফংসনের অন্তর দ্বারা প্রকাশ হইয়াছে। এইরূপে ফংসনদিগকে লওয়া হইয়াছে; ঐ সূত্রফলের প্রথম সংজ্ঞাটী ঐ দুই গুণনীয়ক প্রকাশিত ফলের প্রথম সংজ্ঞাটী হইতে লওয়া হইয়াছে এবং দ্বিতীয় সংজ্ঞাটী উহাদের দ্বিতীয় সংজ্ঞা হইতে লওয়া হইয়াছে, যথা—

শান. (ক + খ). শান. (ক—খ) = শান.^{২} ক—শান.^{২} খ; এস্থানে শান.ক লওয়া গিয়াছে. শান. ক কোশ. খ হইতে। যাহা শান. (ক + খ) ও শান. (ক—খ) এর প্রকাশিত ফলের প্রথম সংজ্ঞা, এবং কোশ. ক শান.খ হইতে শান. খ লওয়া গিয়াছে। ইহা হয় উহাদের দ্বিতীয় সংজ্ঞা; কিন্তু এই গুণিতক আরও = কোশ.^{২} খ—কোশ.^{২} ক; এস্থানে কোশ খ লওয়া গিয়াছে; উক্ত গুণফলের প্রথম সংজ্ঞা হইতে আর দ্বিতীয় সংজ্ঞা হইতে কোশ. ক গৃহীত হইয়াছে।

২ উপরোক্ত সূত্রতে ক এবং খ—এই দুই কোণের পরিমাণ (অবশ্য) নির্দ্দিষ্ট নহে, উহাদিগকে কোন এক পরিমাণের

কোণ বিবেচনা করা যাইতে পারে। যাহা নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহে প্রকাশিত হইল।

উদা—১। শান. (২ ক + ৩ খ) + শান. (২ ক—৩ খ) = ২ শান. ২ ক. কোশ. ৩ খ।

উদা—২। ২ শান. (ক + খ) কোশ. (ক—খ) = শান. {(ক + খ) + (ক—খ)} + শান. {(ক + খ)—(ক—খ)} = শান. ২ ক + শান. ২ খ।

উদা—৩। কোশ. (ক—খ) কোশ. (খ—গ) = ½ {কোশ. (ক—খ + খ—গ) + কোশ. (ক—খ—খ + গ)} = ½ {কোশ. (ক—গ) + কোশ. (ক—২ খ + গ)।

উদা—৪। কোশ. (ক + ৩০°) কোশ. (৩০°—ক) = কোশ. (ক + ৩০°) কোশ. (ক—৩০°) (৪৯ সংজ্ঞা দ্বারা) = কোশ² ক.—শান² ৩০° = কোশ² ক—¼ = ½ (১ + কোশ. ২ ক)—¼ = ¼ {(২ + ২ কোশ. ২ ক)—১} = ¼ (১ + ২ কোশ. ২ ক)।

এক্ষণে টেঞ্জেণ্ট (ক + খ) এবং টেঞ্জেণ্ট (ক—খ) এর সূত্রফল ক এবং খ এর ফংসন দ্বারা প্রকাশকরণ।

$$\text{টেন. (ক + খ)} = \frac{\text{শান. (ক + খ)}}{\text{কোশ. (ক + খ)}} =$$

$$= \frac{\text{শান. ক কোশ. খ + কোশ. ক শান. খ}}{\text{কোশ. ক কোশ. খ—শান. ক শান. খ}},$$ শেষের সমবাহু এর লব এবং হরকে কোশ. ক. কোশ. খ দ্বারা ভাগ করিলে এই ফল লব্ধ হইবে,

যথা, $$\frac{\dfrac{\text{শান.ক}}{\text{কোশ.ক}} + \dfrac{\text{শান.খ}}{\text{কোশ.খ}}}{\dfrac{\text{শান.ক. শান.খ}}{\text{কোশ.ক. কোশ. খ}}} = \frac{\text{টেন. ক + টেন. খ}}{\text{১—টেন.ক. টেন.খ}}।$$

$$\text{অতএব টেন. (ক+)} = \frac{\text{টেন. ক + টেন. খ}}{\text{১—টেন. ক. টেন. খ}}।$$

এক্ষণে খ = ক মনে কর। তাহা হইলে আমরা এই প্রাপ্ত হই;

$$\text{টেন. ২ক} = \frac{\text{২ টেন. ক}}{\text{১—টেন.}^{২}\text{ক}}। \quad \text{টেন. (ক—খ)} = \frac{\text{শান. (ক—খ)}}{\text{কোশ. (ক—খ)}};$$

$$= \frac{\text{শান. ক. কোশ. খ—কোশ ক. শান খ}}{\text{কোশ. ক. কোশ. খ + শান ক. শান খ}},$$

উক্তরূপে কোশ খ. কোশ ক দ্বারা ভাগ করিলে এই ফল হয়। যথা—

$$\text{টেন. (ক—খ)} = \frac{\frac{\text{শান. ক}}{\text{কোশ. ক}} - \frac{\text{শান. খ}}{\text{কোশ. খ}}}{১ + \frac{\text{শান. ক. শান. খ}}{\text{কোশ. ক. কোশ. খ}}} = \frac{\text{টেন. ক—টেন. খ}}{\text{১+টেন. ক টেন. খ}}$$

উদাহরণ নিমিত্ত মনে কর খ = ৪৫° অতএব টেন. ৪৫° = ১, তন্নিমিত্ত উপরোক্ত সূত্রফল সকল এই হইবে।

$$\text{টেন. (ক + ৪৫°)} = \frac{\text{১ + টেন. ক}}{\text{১— টেন. ক}};$$

$$\text{টেন. (ক—৪৫°)} = \frac{\text{টেন. ক—১}}{\text{টেন. ক + ১}}।$$

কোটেঞ্জেণ্ট (ক + খ) এবং কোটেঞ্জেণ্ট (ক—খ) এর সূত্রফল ক এবং খ এর ফংসন দ্বারা প্রকাশকরণ।

$$\text{কোট. (ক+খ)} = \frac{\text{কোশ. (ক+খ)}}{\text{শান. (ক+খ)}} =$$

$$\frac{\text{কোশ. ক. কোশ. খ—শান ক. শান খ}}{\text{শান. ক. কোশ. খ+কোশ. ক. শান. খ}};$$

উপরোক্তরূপে শান ক. শান. খএর দ্বারা ভাগ করিবার এই ফল হয়।

$$\text{কোট.}(\text{ক}+\text{খ})=\frac{\frac{\text{কোশ.ক. কোশ.খ}}{\text{শান.ক. শান.খ}}-১}{\frac{\text{কোশ.খ}}{\text{শান.খ}}+\frac{\text{কোশ.ক}}{\text{শান.ক}}}=\frac{\text{কোট.ক.কোট.খ}-১}{\text{কোট.খ}+\text{কোট.ক}}$$

$$\text{কিম্বা}=\frac{\text{কোট.ক. কোট.খ}-১}{\text{কোট.ক}+\text{কোট.খ}}।$$

মনে কর খ = ক, তাহা হইলে অপর সূত্রফল সকলও এইরূপ হইবে যথা—

$$\text{কোট.}২\text{ক}=\frac{\text{কোট.}^{২}\text{ক}-১}{২\,\text{কোট.ক}}।$$

এইরূপে $\text{কোট.}(\text{ক}-\text{খ})=\frac{\text{কোশ.ক. কোশ.খ}+\text{শান.ক. শান.খ}}{\text{শান.ক. কোশ.খ}-\text{কোশ.ক. শান.খ}}$

$$=\frac{\frac{\text{কোশ.ক. কোশ.খ}}{\text{শান.ক. শান.খ}}+১}{\frac{\text{কোশ.খ}}{\text{শান.খ}}-\frac{\text{কোশ.ক}}{\text{শান.ক}}}=\frac{\text{কোট.ক. কোট.খ}+১}{\text{কোট.খ}-\text{কোট.ক}}।$$

শান ২ক = ২ শান. ক. কোশ. ক (৮২ সং অনু) =

$\frac{২\,\text{শান.ক কোশ.ক}}{\text{শান.}^{২}\text{ক}+\text{কোশ.}^{২}\text{ক}}$ (৩২ সং অনু) শেষের প্রকাশিত ফলের লব ও হরকে কোশ.^{২}ক দিয়া ভাগ কর; তাহা হইলে এই হইবে,

$$\frac{\frac{২\,\text{শান.ক}}{\text{কোশ.ক}}}{১+\frac{\text{শান.}^{২}\text{ক}}{\text{কোশ.}^{২}\text{ক}}}=\frac{২\,\text{টেন.ক}}{১+\text{টেন.}^{২}\text{ক}};$$

অতএব $\text{শান.}২\text{ক}=\frac{২\,\text{টেন.ক}}{১+\text{টেন.}^{২}\text{ক}}।$

আবার $\text{কোশ.}২\text{ক}=\text{কোশ.}^{২}\text{ক}-\text{শান.}^{২}\text{ক}$ (৮২ সং অনু)

$$=\frac{\text{কোশ.}^{২}\text{ক}-\text{শান.}^{২}\text{ক}}{\text{কোশ.}^{২}\text{ক}+\text{শান.}^{২}\text{ক}}\ (\text{৩২ সং অনু})$$

$$=\frac{১-\frac{শান.^{২}ক}{কোশ.^{২}ক}}{১+\frac{শান.^{২}ক}{কোশ.^{২}ক}}$$ কে কোশ ^{২}ক এর দ্বারা বিভাগ করিবে।

$$=\frac{১-টেন.^{২}ক}{১+টেন.^{২}ক}।$$

যে সকল সূত্র দ্বারা ক+খ এবং ক—খ এর ফংসন ক এবং খ এর ফংসন দ্বারা প্রকাশিত হইয়াছে, সেই সকল সূত্র দ্বারা আবার ক এবং খ এর ফংসন সকল $\frac{ক+খ}{২}$ এবং $\frac{ক-খ}{২}$, ইহাদিগের ফংসন দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে, অর্থাৎ ক এবং খ এর ফংসন উহাদিগের সমষ্টির অর্দ্ধের এবং অন্তরের অর্দ্ধের ফংসন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। যথা—

ক+খ =গ, ও ক—খ = ঘ হউক। তাহা হইলেই ক = $\frac{গ+ঘ}{২}$; এবং খ = $\frac{গ-ঘ}{২}$ হইবে।

৮৩ সংজ্ঞাতে যে সকল সূত্র প্রকাশ হইয়াছে, সেই সকল সূত্রতে ক+খ এর স্থানে গ, ও ক—খ এর স্থানে ঘ, এবং ক এর স্থানে $\frac{গ+ঘ}{২}$, ও খ এর স্থানে $\frac{গ-ঘ}{২}$ লিখিলে নিম্নলিখিত সূত্র সকল ধারাবাহিক প্রকাশ পায়।

$$শান.গ+শান.ঘ=২\ শান.\frac{গ+ঘ}{২}\ কোশ.\frac{গ-ঘ}{২},$$

$$শান.গ-শান.ঘ=২\ কোশ.\frac{গ+ঘ}{২}\ শান.\frac{গ-ঘ}{২};$$

$$কোশ.গ+কোশ.ঘ=২\ কোশ.\frac{গ+ঘ}{২}\ কোশ.\frac{গ-ঘ}{২};$$

$$কোশ. ঘ — কোশ. গ = ২ শান. \frac{গ+ঘ}{২} শান. \frac{গ—ঘ}{২};$$

অতএব গ এবং ঘ এর ফংসনের সূত্র সকল যদ্যপি উহাদের সমষ্টির অর্দ্ধের, এবং অন্তরের অর্দ্ধের ফংসম দ্বারা প্রকাশ করা হইল, এক্ষণে ক এবং খ এরও সেইরূপে প্রমাণ হইতে পারে, সুতরাং গ এবং ঘ এর স্থানে ক এবং খ;

$\frac{গ+ঘ}{২}$ ও $\frac{গ—ঘ}{২}$ এর স্থানে $\frac{ক+খ}{২}$ ও $\frac{ক—খ}{২}$

অনায়াসে স্থাপিত করা যাইতে পারে।

$$অতএব\ শান. ক + শান. খ = ২\ শান. \left(\frac{ক+খ}{২}\right) কোশ. \left(\frac{ক—খ}{২}\right) \quad \ldots \quad (১)$$

$$শান. ক – শান. খ = ২ কোশ. \left(\frac{ক+খ}{২}\right) শান. \left(\frac{ক—খ}{২}\right) \quad \ldots \quad (২)$$

$$কোশ. ক + কোশ. খ = ২\ কোশ. \left(\frac{ক+খ}{২}\right) কোশ. \left(\frac{ক—খ}{২}\right) \quad \ldots \quad (৩)$$

$$কোশ. খ — কোশ. ক = ২\ শান. \left(\frac{ক+খ}{২}\right) শান. \left(\frac{ক—খ}{২}\right) \quad \ldots \quad (৪)$$

$$আরও\ শান. ক\ \ শান. খ = শান.^{২} \frac{ক+খ}{২}$$

$$= \text{শান.}^{2}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2};$$

কিম্বা ... ... $= \text{কোশ.}^{2}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}$

$$-\ \text{কোশ.}^{2}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2};$$

$$\text{কোশ. ক. কোশ. খ} = \text{কোশ.}^{2}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}$$

$$-\ \text{শান.}^{2}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2};$$

কিম্বা $\text{কোশ.}^{2}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2} - \text{শান.}^{2}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}$ ।

এইরূপে আর আর সূত্রও প্রকাশ করা যায়। যথা—

$$\frac{\text{শান. ক}+\text{শান. খ}}{\text{শান. ক}-\text{শান. খ}} = \frac{2\ \text{শান.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}\ \text{কোশ.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}{2\ \text{কোশ.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}\ \text{শান.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}$$

$$= \text{টেন.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2} \cdot \text{কোট.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}$$

$$= \text{টেন.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2} \cdot \frac{1}{\text{টেন.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}$$

$$= \frac{\text{টেন.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}}{\text{টেন.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}$$

$$\frac{\text{কোশ.ক}+\text{কোশ.খ}}{\text{কোশ.খ}-\text{কোশ.ক}} = \frac{2\ \text{কোশ.}\left(\frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}\right)\text{কোশ.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}{2\ \text{শান.}\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{2}\ \text{শান.}\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{2}}$$

$$=\text{কোট}.\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{২}\cdot\text{কোট}.\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{২}\ ।$$

$$\text{টেন}.\ \text{ক}+\text{টেন}.\ \text{খ}=\frac{\text{শান}.\text{ক}}{\text{কোশ}.\text{ক}}+\frac{\text{শান}.\text{খ}}{\text{কোশ}.\text{খ}}\ ;$$

৮৩ সংজ্ঞাদ্বারা ইহা বেশ সপ্রমাণ হইতেছে যে, যে কোন সূত্র আমরা প্রাপ্ত হই, যাহাতে ক + খ এবং ক—খ'এর ফংসন ক এবং খ এর ফংসন দ্বারা প্রকাশিত আছে, তাহাকে একেবারে সহজে অন্য ঐ এক প্রকার সূত্রতে পরিবর্ত্তন করা যাইতে পারে ; যাহাতে ক এবং খএর ফংসন $\frac{\text{ক}+\text{খ}}{২}$ এবং $\frac{\text{ক}-\text{খ}}{২}$ এর ফংসনেতে প্রকাশিত হয় ; কেবল এই সূত্রতে এই প্রকার লেখা আবশ্যক হয়।

ক + খ এর স্থানে ক, এবং ক—খএর স্থানে খ, মনে কর, তাহা হইলে কএর স্থানে $\frac{\text{ক}+\text{খ}}{২}$, এবং খএর স্থানে $\frac{\text{ক}-\text{খ}}{২}$ হইবে। যথা—

উদাহরণ।

$$\text{শান}.\ (\text{ক}+\text{খ})=\text{শান}.\ \text{ক}\ \text{কোশ}.\ \text{খ}+\text{কোশ}.\ \text{ক}\ \text{শান}.\ \text{খ},$$

$$\therefore\ \text{শান}.\ \text{ক}=\text{শান}.\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{২}\ \text{কোশ}.\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{২}+\text{কোশ}.\ \frac{\text{ক}+\text{খ}}{২}\ \text{শান}.\ \frac{\text{ক}-\text{খ}}{২}$$

সংজ্ঞা। $\text{টেন}.\ \text{ক}+\text{টেন}.\ \text{খ}=\frac{\text{শান}.\ \text{ক}}{\text{কোশ}.\text{ক}}+\frac{\text{শান}.\ \text{খ}}{\text{কোশ}.\ \text{খ}}$

$$=\frac{\text{শান}.\text{ক}\ \text{কোশ}.\ \text{খ}+\text{কোশ}.\ \text{ক}\ \text{শান}.\text{খ}}{\text{কোশ}.\ \text{ক}\ \text{কোশ}.\text{খ}}=\frac{\text{শান}.(\text{ক}+\text{খ})}{\text{কোশ}.\text{ক}\ \text{কোশ}.\text{খ}}\ ।$$

এইরূপে $টেন. ক - টেন. খ = \frac{শান. (ক - খ)}{কোশ.ক\ কোশ.খ}$ ।

সংজ্ঞা। $টেন. ক + কোট. ক = \frac{শান.ক}{কোশ.ক} + \frac{কোশ.ক}{শান.ক}$

$= \frac{শান.^{২} ক + কোশ.^{২} ক}{শান.ক\ কোশ.ক} = \frac{১}{শান.ক\ কোশ.ক} =$

$\frac{২}{২\ শান.ক\ কোশ.ক} = \frac{২}{শান.২ক}$ ।

$টেন. ক - কোট. ক = \frac{শান.ক}{কোশ.ক} - \frac{কোশ.ক}{শান.ক}$

$= \frac{শান.^{২} ক - কোশ.^{২} ক}{শান.ক\ কোশ.ক} = \frac{কোশ.^{২}ক - শান.^{২}ক}{শান.ক\ কোশ.ক - শান.ক\ কোশ.ক} = \frac{কোশ.২ক}{}$

$= -\frac{২\ কোশ.২ক}{২\ শান.ক\ কোশ.ক} = -\frac{২\ কোশ.২ক}{শান.২ক} = -২\ কোট.২ক$ ।

সংজ্ঞা। এইরূপে শান. ৩ক, কোশ. ৩ক, টেন. ৩ক, ইহাদিগের প্রত্যেককে শান.ক, কোশ.ক, টেন.ক দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা—

$শান\ ৩ক = শান. (২ক + ক) = শান. ২ক\ কোশ. ক +$
$কোশ. ২ক\ শান. ক,$

$= (২\ শান.ক\ কোশ.ক)\ কোশ.ক + (১ - ২\ শান.^{২} ক)\ শান.ক,$

$= ২\ শান.ক\ কোশ.^{২} ক + শান.ক - ২\ শান.^{৩} ক,$

$= ২\ শান.ক\ (১ - শান.^{২} ক) + শান.ক - ২\ শান.^{৩} ক,$

$= ২\ শান.ক - ২\ শান.^{৩} ক + শান.ক - ২\ শান.^{৩} ক,$

$= ৩\ শান.ক - ৪\ শান.^{৩} ক$ ।

$কোশ.\ ৩ক = কোশ. (২ক + ক) = কোশ.২ক\ কোশ.ক$
$- শান.২ক\ শান.ক,$

$= (২\ কোশ.^{২}ক — ১)\ কোশ.\ ক — ২\ শান.^{২}ক\ কোশ\ ক;$

$= (২\ কোশ.^{২}ক — ১)\ কোশ.\ ক — ২কোশ.\ ক\ (১ — কোশ.^{২}ক)$

$= ৪\ কোশ.^{৩}ক — ৩\ কোশ.\ ক।$

এই দুই সূত্র দ্বারা

$$টেন.\ ৩ক = \frac{শান.\ ৩ক}{কোশ.\ ৩ক} = \frac{৩\ শান.\ ক — ৪\ শান.^{৩}ক}{৪\ কোশ.^{৩}ক — ৩\ কোশ.ক}।$$

শেষের প্রকাশিত ফলের লব এবং হরকে কোশ.^{৩} ক এর দ্বারা বিভাগ করিলে এইরূপ হইবে যথা—

$$\left.\frac{\frac{৩\ টেন.ক}{কোশ.^{২}ক} — ৪\ টেন.^{৩}ক}{৪ — \frac{৩}{কোশ.^{২}ক}}\right\} = \frac{৩\ টেন.ক.\ শিক.^{২}ক — ৪\ টেন.^{৩}ক}{৪ — ৩\ শিক.^{২}ক}$$

$$= \frac{৩\ টেন.ক\ (১ + টেন.^{২}ক) — ৪\ টেন.^{৩}ক}{৪ — ৩\ (১ + টেন.^{২}ক)}$$

(৩৪ সং অনু.)

$$= \frac{৩\ টেন.\ ক — টেন.^{৩}ক}{১ — ৩\ টেন.^{২}ক};$$

$$অতএব\ টেন.৩ক = \frac{৩\ টেন.\ ক — টেন.^{৩}ক}{১ — ৩\ টেন.^{২}ক};$$

সংজ্ঞা। ১৫° কোণের এবং ৭৫° কোণের ত্রিকোণমিতি শ্রেণীয় সকলের অঙ্কফল প্রকাশকরণ।

শান. ১৫° = শান. $(৪৫^{\circ} — ৩০^{\circ})$, = শান. ৪৫° কোশ.

৩০°—কোশ. ৪৫° শান. ৩০°, $= \dfrac{১}{\sqrt{২}} \cdot \dfrac{\sqrt{৩}}{২} - \dfrac{১}{\sqrt{২}}$

$\cdot \dfrac{১}{২} = \dfrac{\sqrt{৩}-১}{২\sqrt{২}}$,

টেন. $১৫^\circ = \dfrac{\text{শান. } ১৫^\circ}{\text{কোশ. } ১৫^\circ} = \dfrac{\sqrt{৩}-১}{\sqrt{৩}+১} = \dfrac{(\sqrt{৩}-১)^২}{২}$

$= ২-\sqrt{৩}$ ।

কোটি. $১৫^\circ = \dfrac{\text{কোশ. } ১৫^\circ}{\text{শান. } ১৫^\circ} = \dfrac{\sqrt{৩}+১}{\sqrt{৩}-১} = \dfrac{(\sqrt{৩}+১)^২}{২}$

$= ২+\sqrt{৩}$ ।

শিক. $১৫^\circ = \dfrac{১}{\text{কোশ. } ১৫^\circ} = \dfrac{২\sqrt{২}}{\sqrt{৩}+১}$;

কোশিক. $১৫^\circ = \dfrac{১}{\text{শান. } ১৫^\circ} = \dfrac{২\sqrt{২}}{\sqrt{৩}-১}$ ।

এবং শান. $৭৫^\circ =$ কোশ. $১৫^\circ = \dfrac{\sqrt{৩}+১}{২\sqrt{২}}$;

কোশ. $৭৫^\circ =$ শান. $১৫^\circ = \dfrac{\sqrt{৩}-১}{২\sqrt{২}}$;

টেন. $৭৫^\circ =$ কোটি. $১৫^\circ = ২+\sqrt{৩}$;

কোটি. $৭৫^\circ =$ টেন. $১৫^\circ = ২-\sqrt{৩}$;

শিক. $৭৫^\circ =$ কোশিক. $১৫^\circ = \dfrac{২\sqrt{২}}{\sqrt{৩}-১}$;

কোশিক. $৭৫^\circ =$ শিক. $১৫^\circ = \dfrac{২\sqrt{২}}{\sqrt{৩}+১}$ ।

সংজ্ঞা। যদ্যপি শান. ক = শান. খ এবং কোশ. ক = কোশ.খ হয়, তবে ক এবং খ কোণ পরস্পর শূন্যের

সহিত তুল্য হয়; কিম্বা উহাদের অন্তরফল চারি সমকোণের কোন গুণিতক কোণের সহিত সমান। কারণ কোশ. (ক—খ) = কোশ. ক কোশ. খ + শান. ক শান. খ = কোশ.^{২} ক + শান.^{২} ক = ১;

অতএব ক—খ = ০ কিম্বা = চারি সমকোণের কোন গুণিতক কোণ, (ধন বা ঋণ হউক) (৬৭ সং অনু.)।

সংজ্ঞা। যদ্যপি কোশ. ক = কোশ. খ, এবং শান. ক = —শান. খ হয়, তবে ক + খ শূন্যের সহিত কিম্বা চারি সমকোণের কোন গুণিতক ধন বা ঋণ কোণের সহিত।

কারণ, ত্রিকোণমিতির এই দত্ত সম্বন্ধ এইরূপে লেখা যায়, কোশ. ক = কোশ. (—খ); শান. ক = শান. (—খ)। (৪৯ সং অনু)

এই নিমিত্ত পূর্ব্ব সংজ্ঞানুসারে ক—(—খ), অর্থাৎ ক+খ শূন্যের সহিত কিম্বা চারি সমকোণের কোন গুণিতক কোণের সহিত তাহা ধনাত্মক কিম্বা ঋণাত্মক উভয়ই হইতে পারে।

সপ্তম অধ্যায়।

সংজ্ঞা। আংশিক কোণের সূত্রাবলী।

৮২ সংজ্ঞাতে কএর স্থানে $\frac{ক}{২}$ লিখিলে এইরূপ হয় যথা:—

$$কোশ. ক = ১—২ শান.^২ \frac{ক}{২} = ২ কোশ.^২ \frac{ক}{২} — ১;$$

$$\therefore শান. \frac{ক}{২} = \sqrt{\frac{১—কোশ. ক}{২}}, কোশ. \frac{ক}{২} = \sqrt{\frac{১+কোশ. ক}{২}}$$

অষ্টম অধ্যায়।

প্র—১৮° কোশ.এর শাইন এবং কোশাইন প্রকাশ করণ।

ক এক কোণ হউক যাহার পরিমাণ ১৮°, ও ২ক এর পরিমাণ ৩৬° এবং ৩ক এর পরিমাণ ৫৪° হইবে; অতএব—

শান. ২ক = কোশ. ৩ক, সুতরাং ২ শান. ক কোশ. ক = ৪ কোশ.^{৩}ক—৩ কোশ. ক; এক্ষণে কোশ. ক দ্বারা ভাগ করিলে এই হইবে, যথা ২ শান. ক = ৪ কোশ.^{২} ক—৩; = ৪ (১—শান.^{২}ক)—৩, = ১—৪ শান.^{২} ক, তন্নিমিত্তে

৪ শান.^{২}ক + ২ শান. ক—১ = ০; কিম্বা শান.^{২} ক + $\frac{১}{২}$ শান. ক = $\frac{১}{৪}$;

এই দ্বিতীয় বর্গ সমীকরণের ফল স্থির কর।

এইরূপে শান.^{২}ক + $\frac{১}{২}$ শান. ক + $\frac{১}{১৬}$ = $\frac{১}{৪}$ + $\frac{১}{১৬}$ = $\frac{৫}{১৬}$ কিম্বা (শান. ক + $\frac{১}{৪}$)^{২} = $\frac{৫}{১৬}$; ইহার বর্গফল মুল শান. ক + $\frac{১}{৪}$ = $\frac{\sqrt{৫}}{৪}$ অতএব শান. ক = $\frac{১}{৪}$ ± $\frac{\sqrt{৫}}{৪}$ = $\frac{-১ \pm \sqrt{৫}}{৪}$ = শান. ১৮°।

যেহেতু ১৮° পরিমাণের কোণের শাইন ধনরাশি হয়, তন্নিমিত্তে আমরা উপরিলিখিত ফলে ধন (+) চিহ্ন লইব।

অতএব শান ১৮° = $\frac{\sqrt{৫}—১}{৪}$;

এবং কোশ. ১৮° = $\sqrt{(১—শান.^{২}\ ১৮°)}$ = $\frac{\sqrt{(১০+২\sqrt{৫})}}{৪}$।

প্র—৩৬° কোণের শাইন্ এবং কোশাইন স্থিরকরণ।

৮২ সংজ্ঞাদ্বারা কোশ. ২ক = ১—২ শান.^{২}ক।

অতএব কোশ. ৩৬° = ১ — ২ শান.^{২} ১৮°; = ১—২ $\left(\frac{\sqrt{৫}-১}{৪}\right)^{২} = \frac{১+\sqrt{৫}}{৪}$;

$\therefore$ শান. ৩৬° = $\sqrt{(১—\text{কোশ.}^{২}\ ৩৬°)} = \frac{\sqrt{(১০—২\sqrt{৫})}}{৪}$।

প্র—(সংজ্ঞা) এই সকল কোণ হইতে ৫৪° এবং ৭২° কোণের ত্রিকোণমিতি রেশীয় (অনুপাত) স্থিরকরণ।

শান ৫৪° = কোশ. ৩৬°, কোশ. ৫৪° = শান. ৩৬°; আর শান. ৭২° = কোশ. ১৮°, কোশ. ৭২° = শান. ১৮°।

১১০ সংজ্ঞা; এবং ১০৭ এর সংজ্ঞাতে একের অধিক ফল কি জন্য প্রকাশ হইয়াছে তাহার কারণ এই যে শান. ২ক = কোশ. ৩ক এই সমীকরণের পরিমাণফল যে ১৮° পরিমিত কোণ হইলেই সত্য হয় এমন নহে, ১৮° ভিন্ন অন্য পরিমাণের কোণও ইহাতে খাটিতে পারে। এই সমীকরণ এইরূপও লেখা গিয়া থাকে যথা কোশ. (৯০°—২ ক) = কোশ. ৩ ক। এই জন্যই—আমরা স্থির করি যে, ৯০°—২ ক ইহা হয়ত ৩ ক কোণের সমতুল্য কিম্বা এমন এক কোণের সমতুল্য যাহার কোশাইন ৩ ক এর কোশাইনের সহিত সমান। অতএব ক কোণের প্রত্যেক সম্ভবনীয় পরিমাণ এই সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ হইতে পারে।

$$৯০°—২\ ক = ন.\ ৩৬০° \pm ৩\ ক;$$

অতএব ক = $\frac{৯০°—ন.\ ৩৬০°}{২ \pm ৩}$; এ স্থানে ন শূন্যও হইতে

পারে কিম্বা অন্য কোন অখণ্ড রাশিও ধনাত্মক কিম্বা ঋণাত্মকও হইতে পারে।

দৃষ্টান্তহেতু প্রদর্শিত হইতেছে যে, যদ্যপি ন = ০ হয়, এবং উল্লিখিত যে সূত্রের দ্বারা ক প্রকাশ হইয়াছে তাহারা হরের নিম্নস্থ চিহ্ন যদ্যপি আমরা গ্রহণ করি, তাহা হইলে এই ফল হয় ক = —৯০° ক এর ফল এইরূপ হওয়াতে কোশ. ক = ০ হয়। অতএব ১০৭ সংজ্ঞার সমীকরণ গুণনীয়ক কোশ. ক, যাহা ভাগ দ্বারা বিলোপ হইয়াছিল তাহা এস্থানে রাখিতে হইতেছে, কারণ তাহা হইলে ১০৭ সংজ্ঞার সমীকরণ সত্য হইতে পারে না। পুনশ্চ যদ্যপি ন = ১ হয়, এবং হরের উপরের চিহ্ন যদ্যপি গ্রহণ করা যায়, তাহা হইলে এই ফল লব্ধ হয় যথা—

$$ক = \frac{—২৭০^\circ}{৫} = —৫৪^\circ;\ এবং\ শান.—৫৪^\circ = শান.\ ৫৪^\circ$$

$$= —কোশ.\ ৩৬^\circ = —\frac{১ + \sqrt{৫}}{৪};$$

অতএব ১০৭ এর সংজ্ঞার সমীকরণের বর্গমূলে আমরা যে চিহ্ন গ্রহণ করিয়াছি, তাহার বিপরীত চিহ্ন এস্থান লইবার তাৎপর্য্য বুঝা যায়।

সংজ্ঞা। ৯° এবং ৮১° এর শাইন এবং কোশাইন প্রকাশ করণ।

১০০ সংজ্ঞা দ্বারা শান. ৯° + কোশ ৯° $= \sqrt{(১ + শান.১৮^\circ)}$

$$= \frac{\sqrt{(৩ + \sqrt{৫})}}{২},$$

$$শান.\ ৯^\circ — কোশ.\ ৯^\circ = \sqrt{(১ — শান.\ ১৮^\circ)} = \frac{\sqrt{(৩ — \sqrt{৫})}}{২}$$

$$\text{অতএব শান. ৯}^\circ = \sqrt{\frac{(৩+\sqrt{৫})-\sqrt{(৩-\sqrt{৫})}}{৪}} = \text{কোশ. ৮১}^\circ,$$

$$\text{কোশ. ৯}^\circ = \sqrt{\frac{(৩+\sqrt{৫})+\sqrt{(৫-\sqrt{৫})}}{৪}} = \text{শান. ৮১}^\circ,$$

এক্ষণে আমরা নিম্নলিখিত কোণ সকলের শাইন এবং কোশাইন প্রকাশ করিয়াছি, ৯°, ১৫°, ১৮°, ৩0°, ৩৬°, ৪৫°, ৬0°, ৭২°, ৭৫°, ৮১, (৩৬, ৩৭, ৯২, ১০৭, ১০৮, ১১১ সংজ্ঞায় দেখ।)

যেহেতু ৩° = ১৮°—১৫° অতএব ৩° এর শাইন এবং কোশাইন অনায়াসে ১৮° এবং ১৫° এর শাইন এবং কোশাইনের দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে (৭৭ সং অনু); আর (৭৬ সং অনু) ঐ সকল প্রকাশিত ফল দ্বারা ৩°, ৬°, ৯°, ১২°, ১৫°, ইত্যাদি কোণমালার কোন কোণের ত্রিকোণমিতি (ratio) রেশীয় সকল সহজে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

১১২ প্রশ্ন। ৮৭ এবং ৯১ (সং অনু) শান. ২ক, কোশ. ২ক, শান. ৩ক, এবং কোশ. ৩ক ইহাদের ফল শান.ক এবং কোশ. ক (সং অনু) আমরা প্রকাশ করিয়াছি।

এইরূপে ৪ক, ৫ক ইত্যাদি কোণেরও শাইন এবং কোশাইনের ফল আমরা প্রকাশ করিতে পারি।

কারণ শান. (ন+১) ক + শান. (ন—১) ক = ২ শান. ন ক কোশ. ক;

তন্নিমিত্তে শান. (ন + ১) ক = ২ শান. ন ক কোশ. ক— শান. (ন—১) ক,

অন্য প্রকার

কোন এক কোণের নাম α হউক, তাহা হইলে

শান. (ন + ১) α + শান. (ন—১) α = ২ শান. ন α কোশ α

মনে কর ২ কোশ. α = ২—হ, হউক তাহা হইলে,

শান. (ন +১) α + শান. (ন—১)α = (২—হ) শান. ন α

অতএব শান. (ন + ১) α—শান. ন α = শান. ন α— শান. (ন—১) α—হ শান. ন α ; এই সূত্র দ্বারা সেই সকল কোণের শাইন প্রকাশ করা যায় যে সকল কোণ পাটীক প্রগ্রেসন (form) করে।

এক্ষণে ন = ৩ হউক ; তাহা হইলে,

শান. ৪ ক = ২ শান. ৩ ক কোশ. ক—শান. ২ ক ;

আবার ন = ৪ যদ্যপি হয়, তবে

শান. ৫ ক = ২ শান. ৪ ক কোশ. ক—শান. ৩ ক ;

এইরূপে ৬ ক, ৭ ক ইত্যাদি অন্য অন্য কোণ সকলেরও শাইন এবং কোশাইন প্রকাশ হইতে পারে।

আর শান. ৩ ক, শান. ২ক ইহাদের ফল যাহা ৯১ এবং ৮২ প্রশ্নতে শান. ক, কোশ. ক এর সংজ্ঞাতে প্রকাশ হইয়াছে, সেই সকল ফল এস্থানে লিখিলে, শান. ৪ ক এবং ফল শান. ক, কোশ. ক এর সংজ্ঞাতে প্রকাশ পায়। এবং শান. ৪ ক এর এইরূপ প্রকাশিত ফল দ্বারা শান. ৫ক, এবং শান. ৫ ক এর এইরূপ প্রকাশিত ফল দ্বারা শান. ৬ ক এবং এইরূপ ক্রমশঃ শান. ৭ ক, ও শান. ৮ ক ইত্যাদি সকল

কোণের শাইন ক কোণের শাইন এবং কোশাইনের দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অতএব শান. ৪ ক, শান. ৫ ক, শান. ৬ ক ইত্যাদি সকল কোণের শাইন ক কোণের শাইন এবং কোশাইনের সংজ্ঞা দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

এইরূপে কোশ. (ন + ১) ক + কোশ. (ন—১) ক = ২ কোশ. ন ক কোশ. ক; তন্নিমিত্ত কোশ. (ন+ক) = ২ কোশ. ন ক কোশ. ক—কোশ. (ন—১) ক; অতএব কোশ. ৪ ক, কোশ. ৫ ক, কোশ. ৬ ক ইত্যাদি প্রকার কোশ.কে ক্রমশঃ প্রকাশ করিবার নিমিত্ত এই সূত্রটী ব্যবহার করিলে ফল প্রাপ্ত হওয়া যায়; যেরূপ শান. ৪ ক, শান. ৫ ক ইত্যাদি প্রকাশকরণ বিষয়ে লেখা গিয়াছে।

১১৩ প্রশ্ন। কোন যুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতি রেশীয় সকল উহাদের আংশিক কোণের ত্রিকোণের ত্রিকোণমিতি রেশীয়ের সংজ্ঞা দ্বারা সহজে প্রকাশ করা যাইতে পারে। যথা—

শান. (ক + খ + গ) = শান. (ক + খ) কোশ. গ + কোশ. (ক + খ) শান. গ,

= শান. ক কোশ. খ কোশ. গ
+ শান. খ কোশ. গ কোশ. ক
+ শান. গ কোশ. ক কোশ. খ
— শান. ক শান. খ শান. গ

কোশ. (ক + খ + গ) = কোশ. (ক + খ) কোশ. গ—শান. (ক + খ) শান. গ,

= কোশ. ক কোশ. খ কোশ. গ

$$— শান.\ ক\ শান.\ খ\ কোশ.\ গ$$

$$— কোশ.\ খ\ শান.\ ক\ শান.\ গ$$

$$— শান.\ গ\ কোশ.\ ক\ শান.\ খ$$

$$টেন.\ (ক+খ+গ) = \frac{শান.\ (ক+খ+গ)}{কোশ.\ (ক+খ+গ)};$$

$$= \frac{শান.ক\ কোশ.খ\ কোশ.\ গ + শান.\ খ\ কোশ.\ গ\ কোশ.ক + শান.\ গ\ কোশ.\ ক\ কোশ.\ খ — শান.\ ক\ শান.\ খ\ শান.\ গ}{কোশ.\ ক\ কোশ.\ খ\ কোশ.\ গ — শান.\ ক\ শান.\ খ\ কোশ.\ গ — কোশ.\ খ\ শান.\ ক\ শান.\ গ — কোশ.\ ক\ শান.\ গ\ শান.\ খ}$$

এই সমীকরণের ডানি পার্শ্বের বাহুর লব ও হর উভয়কেই কোশ. ক কোশ. খ. কোশ. গ দ্বারা ভাগ করিলে এই ফল লব্ধ হয়, যথা—

$$টেন.\ (ক+খ+গ) = \frac{টেন.\ ক + টেন.\ খ + টেন.\ গ — টেন.\ ক\ টেন.\ খ\ টেন.\ গ}{১ — টেন.\ খ\ টেন\ ক — টেন.\ গ\ টেন.\ ক — টেন.\ গ\ টেন.\ খ}।$$

এস্থানে খ এবং গকে ক এর সমান মনে কর।

তাহা হইলে $টেন.\ ৩\ ক = \frac{৩\ টেন.\ ক — টেন.^{৩}\ ক}{১ — ৩\ টেন.^{২}\ ক}$।

এক্ষণে যদ্যপি ক, খ, গ, এক ত্রিভুজের তিন কোণ হয়, অর্থাৎ $ক + খ + গ = ১৮০^{\circ}$, তাহা হইলে $শান.\ (ক+খ+গ) = 0$;

অতএব শান. ক কোশ. খ কোশ. গ + শান. খ কোশ. ক কোশ. গ + শান. গ কোশ. ক কোশ. খ = শান. ক শান. খ শান. গ।

এই সমীকরণকে কোশ. ক কোশ. খ কোশ. গ দ্বারা ভাগ করিলে = টেন. ক + টেন. খ + টেন. গ = টেন. ক টেন. খ টেন. গ।

যদ্যপি ক + খ + গ = ১৮০° হয়, তাহা হইলে—

শান. ২ ক + শান. ২ খ + শান. ২ গ = ৪ শান. ক শান. খ শান. গ।

কারণ, শান. ২ ক + শান. ২ খ = ২ শান. (ক + খ) কোশ. (ক — খ)
= ২ শান. গ কোশ. (ক — খ)

এবং শান. ২ গ = ২ শান. গ কোশ গ, = — ২ শান. গ কোশ. (ক + খ) (৪৮ সং অনু।)

তন্নিমিত্ত শান. ২ ক + শান. ২ খ + শান ২ গ = ২ শান. গ {কোশ. (ক — খ) — কোশ. (ক + খ)}, = ৪ শান. গ শান. ক শান. খ।

আবার যদ্যপি ক + খ + গ = ১৮০° হয়, তবে কোশ. ক + কোশ. খ + কোশ. গ = ১ + ৪ শান. ½ক শান. ½খ শান. ½গ।

কারণ কোশ. ক + কোশ. খ = ২ কোশ. ½ (ক + খ);
কোশ. ½ (ক — খ) = ২ শান. ½গ কোশ. ½ (ক — খ);
এবং কোশ. গ = ১ — ২ শান.^{2} ½গ;

অতএব কোশ. ক + কোশ. খ + কোশ. গ = ১ + ২ শান. ½গ {কোশ. ½ (ক — খ) — শান. ½গ}, = ১ + ২ শান. ½গ {কোশ. ½ (ক — খ) — কোশ. ½ (ক + খ)} = ১ + ৪ শান. ½ক শান. ½খ শান. ½গ।

আবার যদ্যপি ক + খ + গ = ১৮০° হয়, তবে টেন. (ক + খ + গ) = ০, কারণ টেন. ১৮০° = ০, (অতএব ১১৩ প্রশ্ন দ্বারা)

টেন. ক + টেন. খ + টেন. গ = টেন. ক টেন. খ টেন. গ।

যেহেতু কোট. ক $= \frac{১}{\text{টেন. ক}}$; তন্নিমিত্তে ১১৩ প্রশ্ন দ্বারা

কোট. (ক + খ + গ)

$= \frac{১ — \text{টেন. খ টেন. গ} — \text{টেন. গ টেন. ক} — \text{টেন. ক টেন. খ}}{\text{টেন. ক} + \text{টেন. খ} + \text{টেন. গ} — \text{টেন. ক টেন. খ টেন. গ}}$;

কোট. ৯০° = ০ ; অতএব যদ্যপি ক + খ + গ = ৯০° হয়, তবে টেন. খ টেন. গ + টেন. গ টেন. ক + টেন. ক টেন খ = ১ ।

১১৫ প্রশ্ন । ক, খ, গ এই তিনটী কোণের মধ্যে পরস্পর কি সম্বন্ধ হইলে কোশ.^{২}ক + কোশ.^{২}খ + কোশ.^{২}গ + ২ কোশ.ক কোশ.খ কোশ.গ — ১ ; ইহাদের বৈজিক সমষ্টি ফলশূন্য হইতে পারে ইহা স্থির করিতে হইবে।

অতএব কোশ.^{২}ক + কোশ.^{২}খ + কোশ.^{২}গ + ২ কোশ.ক কোশ. খ কোশ. গ — ১

= (কোশ. ক + কোশ. খ কোশ. গ)^২ + কোশ.^{২}খ + কোশ.^{২} গ — ১ — কোশ.^{২} খ কোশ.^{২} গ =

= (কোশ. ক + কোশ. খ কোশ. গ)^২ + ১ — শান.^{২} খ + ১ — শান.^{২}গ — ১ — (১ — শান.^{২}খ) (১ — শান.^{২}গ)

= (কোশ. ক + কোশ. খ কোশ. গ)^২ — শান.^{২}খ শান.^{২} গ =

= (কোশ.ক + কোশ.খ কোশ.গ + শান.খ শান.গ) (কোশ.ক + কোশ.খ কোশ.গ — শান.খ শান.গ) =

= {কোশ.ক + কোশ.(খ – গ} {কোশ.ক + কোশ.(খ + গ)} =

২ কোশ.$\frac{\text{ক} + \text{খ} — \text{গ}}{২}$ কোশ.$\frac{\text{ক} — \text{খ} + \text{গ}}{২}$ × ২ কোশ.$\frac{\text{ক} + \text{খ} + \text{গ}}{২}$ কোশ.$\frac{\text{খ} + \text{গ} — \text{ক}}{২}$ =

$$= ৪ \text{ কোশ.} \frac{ক+খ+গ}{২} \text{ কোশ.} \frac{খ+গ-ক}{২} \text{ কোশ.} \frac{ক+গ-খ}{২}$$

$$\text{কোশ.} \frac{ক+খ-গ}{২} ।$$

অতএব উপরে প্রদত্ত সূত্রের ফল শূন্য হইলে, এই শেষের প্রকাশিত কোশাইনদিগের মধ্যে একটী কোশাইনের ফল অবশ্য শূন্য হইবে, সুতরাং এই চারি অর্দ্ধযুক্ত কোণের মধ্যে এক অর্দ্ধযুক্ত কোণ, অবশ্য এক সমকোণের কোন দৃঢ় গুণনীয়ক কোণ হইতে হইবে, অর্থাৎ এক সমকোণকে কোন দৃঢ় রাশি দ্বারা গুণ করিলে যে পরিমাণ হয়, এই এই চারি যুক্ত কোণের মধ্যে এক অর্দ্ধযুক্ত কোণের পরিমাণ অবশ্যই তাহা হইতে হইবে। অতএব ক, খ, গ, কোণের মধ্যে এই সম্বন্ধ থাকিলে ঐ দত্ত সূত্রের ফল শূন্য হইতে পারে।

আবার ক, খ, গ যদ্যপি এক ত্রিভুজ ক্ষেত্রের কোণ হয়, তবে $ক+খ+গ = ১৮০°$, কিম্বা $\frac{১}{২}ক + \frac{১}{২}খ + \frac{১}{২}গ = ৯০°$, হইবে। অতএব কোশ.ক + কোশ. খ + কোশ. গ =

$$= ২ \text{ কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক+খ) \text{ কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক-খ) + \text{কোশ } গ,$$

$$= ২ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}গ, \text{ কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক-খ) + (১ - ২ \text{ শান.}^২ \tfrac{১}{২}গ)$$

$$= ১ + ২ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}গ \ \{\text{কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক-খ) - \text{শান.} \tfrac{১}{২}গ\}$$

$$= ১ + ২ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}গ \ \{\text{কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক-খ) - \text{কোশ.} \tfrac{১}{২}(ক+খ)\},$$

$$= ১ + ২ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}গ \ \{২ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}ক \text{ শান.} \tfrac{১}{২}খ\}$$

$$= ১ + ৪ \text{ শান.} \tfrac{১}{২}ক \text{ শান.} \tfrac{১}{২}খ \text{ শান } \tfrac{১}{২}গ ।$$

Printed by I. C. Bose & Co., Stanhope Press., 249. Bow-Bazar Street, Calcutta.